Administración Nacional de Educación Pública
Consejo Directivo Central

CUADERNOS DE ESTUDIO III

Programa para el Mejoramiento de la Enseñanza
de la Matemática en ANEP

Administración Nacional de Educación Pública Av. del Libertador 1409. Montevideo
Prgrama para el Mejoramiento de la Enseñanza de la Matemática en ANEP

Foto de tapa y contratapa:
Ing. José Luis Massera

Fotografos:
Eduardo Collins
Aurelio González

Realización
Gustavo Rijo
Diseño Gráfico – CODICEN
Asilo 3255 Of.3
Tel.: 481 9694

OCTUBRE 2007

Programa para el Mejoramiento de la Enseñanza de la Matemática
Coordinador: Prof. Ricardo Vilaró

Responsables de la Publicación
Prof. Carla Damisa
Prof. Ariel Fripp
Mtra. Liliana Pazos
Mtra. Beatriz Rodríguez Rava
Prof. Ricardo Vilaró

ÍNDICE

PRESENTACIÓN

Esta publicación integra la serie ***"Cuadernos de Estudio"*** del Programa para el Mejoramiento de la Enseñanza de la Matemática en ANEP (PMEM).

Este Programa funciona en la órbita de la ANEP desde el año 2000 y desde su gestación se ha desarrollado como un espacio para la indagación, el estudio, la producción de conocimiento didáctico y la elaboración de propuestas alternativas con el objetivo de mejorar la enseñanza de la Matemática en la ANEP.

Desde su constitución incorporó docentes de todos los susbsistemas y niveles de la ANEP y contó con la presencia activa de dos matemáticos profesionales nombrados por los Consejos de las Facultades de Ciencias e Ingeniería de la Universidad de la República (UDELAR).

El PMEM ha realizado un abordaje de la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática como un continuo desde la Educación Inicial a la Media Superior, la Formación Docente y las respectivas interfases.

Como parte del trabajo de indagación y reflexión se ha realizado un esfuerzo de relacionamiento internacional y de relevamiento de información respecto a producción, planes y programas de otros países.

Los talleres, seminarios, cursos y acciones de desarrollo curricular realizados en la órbita del Programa han tenido, además de su propio valor, la posibilidad de aportar a la indagación y a la reflexión sobre los problemas de la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática.

El PMEM se constituyó de este modo en un Programa con autonomía relativa para relevar, analizar, investigar y teorizar sobre los problemas de la enseñanza en toda la ANEP y para establecer un diálogo y una cooperación permanente con los diferentes subsistemas.

Ha ido construyendo sus saberes y enfoques desarrollando un nivel de estudio e investigación y recogiendo - en la medida de sus posibilidades - la producción en documentos y publicaciones.

Es en este marco en el que surge la serie ***"Cuadernos de estudio"***. En cada una de estas publicaciones se incluye una pequeña biografía y la imagen de un especialista que se ha destacado por su producción en Matemática y / o en su enseñanza. En este número se pretende hacer un reconocimiento al ***Ing. José Luis Massera*** como uno de los fundadores de la comunidad matemática uruguaya.

JOSÉ LUIS MASSERA: MATEMÁTICO, POLÍTICO, HUMANISTA

El trabajo académico, el estudio de viejos y nuevos problemas, el compromiso con la enseñanza y sus desafíos, se inscriben en un esfuerzo de creación y producción que se ha ido registrando a través de la historia integrando el legado de hombres y mujeres a través del tiempo.

El Programa para el Mejoramiento de la Enseñanza de la Matemática en la ANEP en sus "Cuadernos de Estudio" ha intentado que la proyección de hombres de la talla del Ingeniero Rafael Laguardia, el Dr. Santaló, el Dr. Miguel de Guzmán y en este número, el Ingeniero José Luis Massera, inspiren el compromiso profesional y académico de los docentes de Matemática.

Hemos aceptado el compromiso de escribir unas líneas en torno a la imponente personalidad, calidad científica y humana del Prof. José Luis Massera, matemático de relieve mundial, formador junto al Ing. Rafael Laguardia de la "Escuela de Matemática del Uruguay", político comprometido con su país y su época, pensador humanista. Desafío que sentimos nos supera, pero no podíamos eludir.

Conocimos a Massera profesor en el año 1958. Tuvimos el privilegio de tenerlo como docente en las clases teóricas en el curso de Análisis Matemático I y también en el subgrupo de Práctico de dos horas semanales. Esto último, como bien lo señala Juan Grompone, un privilegio que habla de la calidad docente de Massera: no es común que un matemático de su talla atienda cursos prácticos y menos de un primer año de Facultad. Recuerdo estar atascado con un problema relativo a la exponencial compleja, y el profesor Massera se me acerca, y me dice: "saque esos complejos del bolsillo" y luego, con algo menos que una sugerencia me dio aire para continuar el trabajo.

Conocimos a Massera político, y recuerdo el impacto que me causó, al fijar una entrevista, observar que su agenda estaba dividida en franjas de 15 minutos. En todas sus actividades la racionalidad, el rigor, el método, junto a su profunda formación e inteligencia le otorgaban la posibilidad de atender competentemente una variada diversidad de problemas y asuntos complejos.

Y nos reencontramos con Massera liberado luego de una larga y dura prisión, asumiendo la reconstitución de la comunidad matemática y científica, en el Instituto de Matemática y Estadística, en el Programa de Desarrollo de las Ciencias Básicas (PEDECIBA), acompañando el proceso de creación de la Facultad de Ciencias, y dedicando su esfuerzo también a trabajar en torno a problemas de Filosofía de la Matemática.

Es muy vasto y rico el legado de Massera. Para los lectores a quienes dirigimos estos cuadernos de reflexión, maestros, profesores y formadores de futuros docentes de Matemática, realizamos las siguientes menciones:

1. Cuenta el profesor Massera[1] "Cuando cursaba el sexto año del ciclo Primario, tuve un maestro que marcó mi vida profundamente. Nada más ni nada menos, él me enseño a pensar. Era algo adusto, no admitía fáciles simpatías, alguna vez que no olvido me sancionó, y ante la protesta de mi padre anotó en su libreta una sola palabra: "mimado", cosa que pude leer, quizás porque él quería que lo leyera. Y estuve de acuerdo con él. Lo esencial fue lo que ya dije antes: más allá de los conocimientos del programa, fue capaz de grabar fuertemente en mi mente que lo decisivo no era tal o cual aprendizaje particular. Sino ayudarme a que yo mismo fuera capaz de entender, como cosa propia, mía, como pensando, hubiera podido llegar a él." ¡Una cualidad docente por excelencia destacada por un matemático!

2. En la misma conferencia cuenta que "en tercer año (de liceo) el profesor de matemática era un alemanote que sabía algo y me daba gusto, quizás como manifestación incipiente de mi vocación". Interpretamos esta referencia de Massera valorando en la formación de un docente la potencialidad de responder a inquietudes y de abrir "ventanas" motivadoras del saber.

3. Como consecuencia del pasaje por Preparatorios de Ingeniería (hoy 5to y 6to de Bachillerato) conoció a Laguardia, quien incorporando a jóvenes aficionados a la Matemática facilitó la formación de un grupo de estudio. Todos los sábados se reunían; el que había leído un trabajo, un tema nuevo se lo exponía a los otros. Pensando en los docentes de Matemática, recuerdo que a fines de la década del 50 y primera mitad de la década del 60 en el Liceo Larrañaga, todos los domingos por la mañana nos reuníamos un grupo de 20 a 30 profesores de Matemática de Preparatorios con la presencia a veces de Laguardia y de jóvenes futuros matemáticos a tratar temas nuevos de Matemática o nuevos enfoques para abordar temas conocidos. El trabajo docente no era entonces insalubre, la unidad docente estaba topeada en 21 horas. Las tensiones previas a la dictadura, la destrucción de la cultura operada por ésta, y las condiciones de la labor docente al recobrarse la democracia no favorecieron este tipo de buenas prácticas entre profesores. La sobrecarga de trabajo, las bajas remuneraciones, la distancia institucional entre los matemáticos y la formación de los Profesores de Matemática son factores que han contribuido al deterioro de la calidad docente en nuestro país.

4. La presencia de Rey Pastor[2], del italiano Beppo Levi, de Santaló y Mischa Cotlar en Argentina, constituyó una fuente de encuentros, seminarios y cursillos que potenció la formación matemática de este grupo de uruguayos que luego se incorporarían al Instituto de Matemática y Estadística de la Facultad de Ingeniería fundado por Rafael Laguardia en 1942 bajo el decanato del Ingeniero Eduardo García de Zúñiga[3]. No hay duda que Laguardia que había ya realizado como lo menciona Massera "un curso superior con grandes profesores franceses" fue un impulsor ideal de ese grupo de estudiantes con

[1]" Recuerdos de mi vida académica y política", Conferencia del Prof. José Luis Massera, Museo Nacional de Antropología, Ciudad de México. 6 de marzo de 1998.

[2] El mismo Massera menciona a Rey Pastor señalando "que hacía viajes anuales a Europa para actualizarse" poniendo énfasis en la voluntad de estudio, profundización y actualización en Matemática.

[3] El Prof. Eduardo García de Zúñiga, distinguido profesor de Matemática de la Facultad de Ingeniería contribuyó en forma importante a enriquecer la Biblioteca de la Facultad con obras científicas y principales revistas de Matemática del mundo.

vocación marcada por la Matemática. Ambos, Laguardia y Massera miraban lejos, proyectaban en forma singular a muy largo plazo, y se destacaron por detectar motivaciones, dar alas y promover la formación de futuros matemáticos. Salvando las distancias, a nivel de la escuela y de la enseñanza media, maestros y profesores en nuestra opinión tienen en su misión promover el gusto por el saber, por explorar y buscar el conocimiento, por cultivar la mente, por plantearse desafíos intelectuales; promover clubes de ciencia o de Matemática con sus virtudes de socialización y cooperación entre pares .

5. Terminada la segunda guerra mundial, Massera usufructuando una beca de la Fundación Rockefeller viajó a estudiar a EE.UU. Lo hizo en diversas Universidades, con matemáticos de la talla de Polya y Szesgo, Courant, Friedrichs, Artin. El Dr. Ernesto Mordecki destaca de las múltiples contribuciones de Massera al desarrollo de la Matemática dos direcciones de trabajo: 1. la demostración del recíproco del método de Lyapunov en la estabilidad del movimiento, descripción del conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales en el plano, estudio de las soluciones periódicas armónicas y subarmónicas; resultados publicados en Annals of Mathematics, que como dice Dr. Jorge Lewowicz "han sido y son hoy de uso frecuente por matemáticos, físicos, químicos, economistas, ingenieros electrotécnicos, químicos industriales, etc."; 2. el estudio de las "relaciones entre la estabilidad condicional de una ecuación lineal homogénea en un espacio de Banach y la existencia de soluciones "buenas" (acotadas, por ejemplo) de la ecuación no homogénea asociada, exitada por una función buena"; trabajo realizado en conjunto con el Dr. J. J. Schäffer, publicando ambos en coautoría el libro "Ecuaciones Diferenciales Lineales" de lectura obligatoria para los especialistas en ese campo.

Los docentes uruguayos tenemos en quienes inspirarnos. Es de desear que nuestra sociedad continúe produciendo vidas que con su trabajo y despliegue de esfuerzo y talento, miren lejos, y contribuyan al desarrollo de la ciencia, y al bienestar de todos.

Prof. Ricardo Vilaró
Octubre 2007

Referencias:

1."Recuerdos de mi vida académica y política", por José Luis Massera. Conferencia dictada en el Museo de Antropología Nacional de Antropología, Ciudad de México; 6 de marzo de 1998.
http://www.cmat.edu.uy/massera

2.José Luis Massera. Matemático, Científico, Docente, Investigador. Testimonios para la experiencia de enseñar. FHCE de la Universidad de la República Oriental del Uruguay. Facultad de Psicología de la Universidad de Buenos Aires, República Argentina. 1999.

3.José Luis Massera. Obituario de la Sociedad Uruguaya de Matemática y Estadística (SUME). Dr. Jorge Lewowicz.
http://www.cmat.edu.uy/~mordecki/massera/sobre/obituario.html

4.Una bibliografía de José Luis Massera, por Ernesto Mordecki.
http://www.cmat.edu.uy/~mordecki/massera/sobre/mordecki-biografia.html

5.José Luis Massera, humanista, por Juan Grompone. Bitácora 2002.
http://www.cmat.edu.uy/~mordecki/massera/sobre/grompone-bitacora.html

PRESENTACIÓN DE DOCUMENTOS

Entre las actividades desarrolladas por el Programa para el Mejoramiento de la Enseñanza de la Matemática en la Administración Nacional de Educación Pública (PMEM) se puede identificar la producción de materiales elaborados a partir del estudio, discusión y análisis de experiencias llevadas a cabo por el propio Programa.

Los documentos que se producen tienen por finalidad la difusión de estudios realizados, de teorizaciones elaboradas a los efectos de aportar elementos que enriquezcan las discusiones de los diferentes colectivos docentes pertenecientes a la enseñanza primaria, media y a la formación de docentes.

En esta publicación se incluyen los siguientes trabajos:

- ¿Medir es comparar?
- 2/4 y 1/ 2 ¿iguales o equivalentes? ¿Qué hacer en la escuela?
- La enseñanza de la geometría: una experiencia en la formación de maestros.
- La matemática en la formación inicial de maestros: análisis de propuestas de examen.
  Análisis de propuestas de examen de matemática de los IFD e IINN de Montevideo (períodos 2005-2006).
- Reflexión en torno a algunas propuestas de examen de Matemática correspondientes al período de noviembre de 2006 en tres Institutos de Formación Inicial de Maestros.

El documento *"¿Medir es comparar?"* desnaturaliza el tema de la medida en el ámbito de la enseñanza primaria dejando en evidencia los múltiples aspectos involucrados en el tema. Tomando fundamentalmente como aportes producciones de Guy Brousseau y de Ma. del Carmen Chamorro se analizan los problemas del aprendizaje y de la enseñanza de dicho contenido. Se discuten y cuestionan algunas prácticas habituales que obstaculizan la apropiación del mismo. Se incluye una posible secuencia para el tercer nivel de la escuela primaria en la que se ponen en juego los diferentes aspectos estudiados a lo largo del trabajo.

"2/4 y 1/ 2 ¿iguales o equivalentes?" Aporta una valiosa mirada desde la Matemática con algunas reflexiones históricas y didácticas.

Este documento surge a partir de las insistentes preocupaciones de algunos docentes con respecto a la utilización y el alcance de los términos "igual" y "equivalente" en el trabajo con fracciones; una cuestión que generó discusiones en el marco del Programa que incluyeron el análisis de algunas creencias de los docentes con respecto al tema. Muchas veces nos enfrentamos a la preocupación del docente por "el rigor matemático" y la necesidad de "utilizar el lenguaje y la simbología correcta". ¿Qué significado se le puede atribuir a estas expresiones en el marco de la escuela primaria?.

Primeramente debemos explicitar que la Matemática como tal logra el rigor y la precisión del lenguaje después de largos recorridos. También que la Matemática se ocupa de hacer rigurosos aquellos conceptos que se muestran fecundos, cuyos significados justifican su introducción y desarrollo en el marco de una teoría. En el texto se invita a dar mayor énfasis a estos aspectos, relacionados con el sentido de los números, y con su uso en el marco de nuestra cultura.

Pero volviendo al tema de formular teorías rigurosas, una característica propia de la Matemática, ¿es posible exigir al alumno de primaria lo que a la Matemática le costó siglos? Por otra parte deberíamos preguntarnos ¿qué aporta al niño la utilización del término "equivalente"? ¿los matemáticos centran sus discusiones en torno a esas disquisiciones o buscan hacer uso de un lenguaje entendible? En este documento integrantes del Programa y representantes de la comunidad matemática nacional aportan valiosos elementos para la reflexión en torno a la reubicación de algunas cuestiones.

El documento *"La enseñanza de la Geometría: una experiencia en la formación de maestros"* recoge una experiencia realizada con un grupo de maestros durante el año 2006. En la misma se plantea el estudio de un contenido geométrico, el cuestionamiento a prácticas habituales y la discusión de propuestas alternativas. Se integran en el documento el recorrido realizado por este grupo de maestros así como actividades para proponer en el aula.

Los dos documentos finales son estudios de propuestas de examen correspondientes a la formación inicial de maestros.

El primero de ellos es *"La matemática en la formación inicial de maestros: análisis de propuestas de examen. Análisis de propuestas de examen de matemática de los IFD e IINN de Montevideo (períodos 2005-2006)."*

El análisis realizado de propuestas de examen, es parte de una serie de actividades que el Programa para el Mejoramiento de la Enseñanza de la Matemática (PMEM) desarrolla en el ámbito de la Formación Inicial de Maestros.

En el año 2002 el PMEM realizó el "Primer estudio de la situación de la enseñanza de la Matemática en Formación Docente a partir de propuestas de examen". Dicho análisis detectó, entre otras cosas, una gran disparidad en las propuestas de examen de los diferentes institutos del país. Disparidad identificada en cuestiones relativas a enfoques, contenidos, nivel de profundización y exigencia.

A partir de lo relevado en dicho trabajo el Programa para el Mejoramiento de la Enseñanza de la Matemática en ANEP en coordinación con la Dirección de Formación Docente y/o la Secretaría Técnica implementó una serie de proyectos con la finalidad de generar espacios de estudio, de discusión, reflexión y aprendizaje por parte de los docentes de Matemática y Taller de Matemática, con la intención de que estos espacios se ampliaran en los respectivos colectivos docentes.

En el año 2006 el PMEM consideró importante volver a analizar las propuestas de examen de Matemática de los IFD e IINN de Montevideo luego de cuatro años de haber realizado el primer estudio de los mismos y habiendo concretado las acciones mencionadas anteriormente. La intención, en esta oportunidad, fue la de detectar alguna variación en las propuestas con respecto a las del año 2002 a través de la observación de los contenidos evaluados y la forma en que se hace.

El último documento que se incluye en esta publicación "*Reflexión en torno a algunas propuestas de examen de Matemática correspondientes al período de noviembre de 2006 en tres Institutos de Formación Inicial de Maestros.*" surge en el marco del Proyecto Grupo de reflexión y planificación de cursos: Matemática I y II y Didáctica /Taller de Matemática [1] en el cual se analizaron y discutieron propuestas de examen correspondientes a los Institutos de Montevideo, Paysandú y San Ramón.[2]

Este trabajo tuvo como finalidad ofrecer a los profesores de Matemática de los Institutos de Formación Inicial de Maestros un documento para la reflexión y discusión, que aporte a la consideración crítica de la propia práctica docente. Es un documento "opinable", abierto a nuevos aportes, que permite a todos reflexionar y confrontar ideas en vistas a mejorar la acción docente en la formación de maestros.

[1] Línea de Trabajo en el marco del Curso de Perfeccionamiento para Profesores de Matemática y Didáctica /Taller de Matemática de IFD e IINN (2004 – 2005).
[2] Participaron de esta tarea los Profesores Carla Damisa, Adriana Ferreira, María de los Angeles Innella, Mercedes Laborde, Liliana Pazos, Inés Piedra Cueva, Beatriz Rodríguez Rava, Virginia Tort y Ricardo Vilaró.

¿MEDIR ES COMPARAR?

Prof. Carla Damisa
Maestra Liliana Pazos[1]

El tema de las magnitudes y la medida ocupa, generalmente, un lugar secundario en las prácticas habituales de enseñanza.

En el primer ciclo de enseñanza primaria la tarea se centra usualmente en realizar algunas mediciones con unidades no convencionales, generalmente antropométricas[2], para pasar rápidamente a las unidades convencionales de uso frecuente. El tema, en este nivel, no ocupa un lugar central en las preocupaciones de los docentes.

Sin embargo, es habitual escuchar entre los maestros de segundo y tercer ciclo preocupación por las dificultades de los alumnos para resolver problemas de equivalencia de medidas. Parecería que cuando aparece el problema de las equivalencias, se revelan con mayor evidencia dificultades en la apropiación de estos saberes. En su intento por sortear estas dificultades los maestros plantean numerosos ejercicios de equivalencias poniendo en juego diferentes "artificios", especialmente tablas de múltiplos y submúltiplos de las diferentes unidades, para ayudar a los alumnos a ser exitosos en su resolución.

¿Cuáles podrían ser las razones de esta dificultad en un contenido en apariencia sencillo? La medida es un tema que los alumnos manejan en situaciones de su vida diaria, están acostumbrados a oír sobre algunas unidades de medida, ven medidas en su entorno cotidiano. ¿Será este conocimiento la base para construir a partir de él otros más complejos? ¿La escuela organiza este contenido con criterios didácticos que permitan al alumno la construcción de los conceptos y procedimientos que el tema pone en juego? Tal vez el uso social de la medida hace que no se tengan en cuenta todos los aspectos que involucra, manejándose en cambio como un saber práctico sin cuestionar sus razones.

Los numerosos problemas que encierra el tema de las magnitudes y la medida aparecerán al ponerse en juego en situaciones especialmente planificadas para ello, que impliquen prácticas de medición efectiva que los hagan emerger. No se aprende sobre medida y no se avanza en este conocimiento si no se mide efectivamente. Sin embargo, siendo ésta una afirmación casi obvia, preguntémonos cuántas veces durante su escolaridad los alumnos se ven enfrentados a resolver problemas que impliquen la medición efectiva. Seguramente estaremos de acuerdo en que estas oportunidades son escasas.

Algunas de las dificultades que implica la medida son independientes de la magnitud en juego, son obstáculos propios del contenido y de la presentación escolar frecuente.
Este análisis pretende enfrentarnos con los aspectos que deberían abordarse desde la enseñanza, sus dificultades, los obstáculos que aparecen, así como los problemas que la práctica escolar habitual pone de manifiesto.

La presentación de las magnitudes y la medida como un campo conceptual[3], implica pensar en los invariantes operatorios y esquemas de este concepto.

[1] Docentes del Programa para el Mejoramiento de la Enseñanza de la Matemática en ANEP.
[2] Unidades que refieren a diferentes partes del cuerpo: codo, pulgada, pie, etc.
[3] Tomamos la idea de campo conceptual de Vergnaud, G .(1991).

En el caso particular de las magnitudes, se encuentran aspectos relativos a la Matemática así como a la Física por lo que el análisis didáctico se vuelve especialmente complejo tanto por esta dualidad como por las interrelaciones que deben establecerse con otros campos del saber.

Los problemas de las magnitudes continuas, sus diferencias con las discretas, la necesidad del uso de una unidad y el necesario fraccionamiento de la misma para hacer posible la medición, así como la conveniencia del uso de un sistema de unidades, deberían ser objeto de un tratamiento didáctico que permitiese a los alumnos la comprensión por encima de la mecanización.

Respecto al contenido medida

Los entornos de la medida

El tema en sí es complejo; la confusión entre magnitud, cantidad de magnitud y medida es usual. Según Brousseau[4], se pueden distinguir distintos aspectos en el tratamiento escolar de la medida.

1)Los objetos soporte en los cuales elegimos los caracteres a medir. En un mismo objeto soporte se pueden medir diferentes magnitudes. Elegiremos la magnitud a medir de acuerdo a la situación que tengamos que resolver.

2)La magnitud, "entendiendo por tal la cualidad común que les hace igualables y sumables"[5].

3)El valor particular o cantidad de magnitud, relativo al objeto preciso que estamos considerando que puede ser representado por una clase de equivalencia.

4)La medida aplicación que hace corresponder a cada elemento de un conjunto medible (un segmento, una superficie, un suceso, una masa) un número real positivo o cero.

5)El valor de la medida, número (no negativo) que la medida le hace corresponder a un objeto medible. Por ejemplo la medida de determinado segmento es 3.

6)La medida concreta dada por un número y una unidad. Por ejemplo: 3cm ó 0,03m.

7)La medición o proceso de medir, operación material o método que permite determinar para un objeto un número, un intervalo de incertidumbre y una unidad.

8)La evaluación de las medidas que sirven de control sobre las actividades de medición, los cálculos o las comparaciones. Por ejemplo la determinación del orden de magnitud de una medida, el tamaño de un número, sus cifras significativas, etc.

[4] Brousseau, G. y Brousseau, N. (1991).
[5] Puig Adam, P. (1973).

Cada uno de estos ocho aspectos pertenece a contextos diversos, donde además son llamados de distintas formas. Todos a su vez intervienen en la conceptualización y en las prácticas de la medida. Sería muy prematuro presentar todos estos elementos en la educación primaria, pero renunciar a su consideración como guía teórica conduce a renunciar también a tratar los aspectos prácticos y conceptuales que conforman de manera compleja el tema. Es posible en la escuela el abordaje de algunos entornos así como el acercamiento no formal a otros.

Trabajar con medida implica "entrar" al conjunto de los números racionales y de los números irracionales.

Quizás la relación más evidente entre medida y el conjunto de los números racionales, es la necesidad de fraccionar la unidad durante el proceso de medición. En consecuencia la expresión de la medida en estos casos corresponde a un número racional, por ejemplo: 3 unidades y $\frac{1}{2}$.

Sin embargo, la urgencia por abordar las expresiones decimales, hace que muchas veces en las prácticas habituales la medición sea una "excusa" para presentar la escritura decimal de décimos y centésimos. Estas expresiones decimales aparecen, en general, desvinculadas de las expresiones fraccionarias cuando, en realidad, las actividades de medición son un campo riquísimo para abordar las vinculaciones entre ambas expresiones.

La medición de una misma cantidad de magnitud utilizando distintas unidades permite establecer distintas medidas para esa cantidad en función de la unidad usada. Si la expresión de esas medidas requiere de una fracción, se abre la posibilidad de establecer las equivalencias entre esas escrituras y en consecuencia es una nueva forma de abordar el tratamiento de la equivalencia de fracciones.

A modo de ejemplo, si una superficie mide $1\frac{1}{2}$A y también 3B, es interesante ver que $B = \frac{1}{2}A$.
Se ha producido un cambio de unidad y en consecuencia ha cambiado la medida pero la cantidad de magnitud se mantiene.

Esta idea pone sobre la mesa, otras vinculadas con las fracciones: a "menor parte" (unidad) mayor número de partes (medida). Es decir que cuanto menor sea la unidad a utilizar, mayor será el número que representa el valor de la medida.[6]

Del mismo modo, la posibilidad de usar fracciones de la unidad cada vez más pequeñas para lograr un acotamiento mayor de la medida, acerca a la idea de densidad de los números racionales. Ésta se pone en evidencia, aunque no siempre se analiza, cuando usamos por ejemplo, metro, decímetro y centímetro para expresar una cierta medida. Si aplicada la iteración de la unidad metro sobre lo que se quiere medir hay un resto de la cantidad de magnitud, se podrá dividir el metro en unidades menores (decímetros) y si aún tenemos resto, habrá que dividir el decímetro y usar centímetros y así sucesivamente. Esta idea de cambio permanente de unidad habilita a pensar en:

- La densidad del conjunto de los números racionales. Entre dos números racionales siempre es posible encontrar otro. Es decir entre dos fracciones siempre hay otra; por tanto infinitas.
- La equivalencia entre expresiones fraccionarias y decimales.

[6] Hacemos referencia a los entornos de medida analizados por Brousseau (1991) citados en las páginas 2 y 3.

- El valor posicional en los "números con coma."

$$1{,}23\text{m se puede escribir también como: } \frac{1}{1}\text{m} + \frac{2}{10}\text{m} + \frac{3}{100}\text{m}.$$

- Las equivalencias entre las unidades en uso, la equivalencia de fracciones y la escritura decimal de las mismas.

$$\frac{1}{1}\text{m} + \frac{2}{10}\text{m} + \frac{3}{100}\text{m} = 1{,}23\text{m}$$

$$\frac{10}{10}\text{m} + \frac{2}{10}\text{m} + \frac{3}{100}\text{m} = \frac{12}{10}\text{m} + \frac{3}{100}\text{m} = 12{,}3\text{dm}$$

$$\frac{100}{100}\text{m} + \frac{20}{100}\text{m} + \frac{3}{100}\text{m} = \frac{123}{100}\text{m} = 123\text{cm}$$

- Las fracciones que forman una proporción como fracciones equivalentes

$$\frac{10}{10} = \frac{100}{100} \Rightarrow 10\text{dm} = 100\text{cm}$$

- La necesidad de multiplicar o dividir por las potencias de 10, resulta de esta forma una necesidad derivada de establecer la equivalencia de fracciones al cambiar la unidad, ya que si A es $\frac{1}{2}$ B, aquello que mide $\frac{2}{6}$ A tendrá como medida $\frac{1}{3}$B puesto que cada 2A corresponde 1B por lo que $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.
  Esto tomará más adelante la forma:
  si A es $\frac{2}{10}$ de B $\Rightarrow$ 5 A $= \frac{5}{10}$B o 0,5B
  que es lo mismo, trabajando con m y dm, que
  5dm = 0,5m ya que $\frac{5}{10} = \frac{0.5}{1}$ [7]

- El trabajo con el inverso de una fracción ya que si A $= \frac{3}{4}$B entonces
  B = $\frac{4}{3}$A

Tener en cuenta los aspectos listados anteriormente al tratar el contenido mediciones enriquecería el trabajo con las equivalencias de medida evitando un tratamiento meramente algorítmico.

Algunos problemas del aprendizaje de la medida[8]

Tener en cuenta los procesos que deben desarrollarse para conceptuar este tema nos posibilita reflexionar acerca de las dificultades y obstáculos que se presentan en su tratamiento. En consecuencia nos acerca a la idea de que el trabajo con la medida necesita un largo período de acercamientos sucesivos durante el cual se vayan abordando los diferentes aspectos.

La génesis de la idea de magnitud y medida en el niño debe superar diferentes momentos para su manejo adecuado:

- consideración y percepción de la magnitud pudiendo aislarla del objeto soporte (entorno 1)[9],
- capacidad de comparar objetos teniendo en cuenta sólo la magnitud considerada (entorno 2),

[7] En este caso no estamos frente a una equivalencia de fracciones sino a razones numéricas iguales, es decir a una proporción. Recordemos que una fracción es un número que puede ser representado por un cociente de enteros $\frac{a}{b}$ con $b \neq 0$.
[8] Tomamos este análisis de Chamorro, Ma. del C. y Belmonte, J. M. (1994).
[9] Hacemos referencia a los entornos de medida analizados por Brousseau (1991) citados en las páginas 2 y 3.

- conservación de la magnitud (entorno 3),
- establecimiento de una relación entre la cantidad de magnitud y el número, momento en que es capaz de medir (entorno 8).

Un primer acercamiento a la medición podría verificarse mediante la comparación perceptiva que evoluciona posteriormente hacia la posibilidad de desplazar los objetos para compararlos directamente o usando un intermediario que puede ser otro objeto o una parte de su propio cuerpo, haciéndose operativa la transitividad. Queda por superar el momento del fraccionamiento del intermediario de modo que pueda aplicarse como unidad de medida.

La constitución de esta unidad de medida seguiría, según Chamorro y Belmonte[10], el siguiente proceso:

- Ligada al objeto que debe medirse (objetal).
- Ligada al objeto a medir pero con la posibilidad de cambiar de un objeto a otro teniendo en cuenta el orden de magnitud entre las partes (situacional).
- La unidad se independiza aunque con tendencia a usar una unidad grande para medir cantidades grandes (figural).
- Se constituye la unidad propiamente dicha por lo que puede otorgarse un número a la cantidad a medir.

Se ha ido pasando de una unidad intraobjeto a una unidad interobjeto.

En el caso particular de la longitud aparece un obstáculo propio: "la dimensión y la distancia son dos aspectos distintos de la longitud. Las dimensiones se entienden como ligadas a objetos "llenos", en donde la longitud tiene pleno sentido al tener algo material en que apoyarse. En la distancia, en cambio, no nos referimos a ningún objeto, sino al espacio vacío comprendido entre dos de ellos. La longitud entre dos objetos es su distancia. Ambas nociones van a ser complementarias"[11] pero no se construyen simultáneamente.
Se está considerando distancia entre dos puntos A y B a la medida de la longitud del segmento de extremos A y B.
La expresión usada por los autores de "llenos" y "vacíos" hace referencia a la representación o no respectivamente, de un segmento dado por sus extremos. Es decir "lleno" refiere al caso en el que la longitud a medir está representada, en cambio "vacío" hace referencia a la determinación de los extremos del segmento pero no "materializados" los puntos pertenecientes a ese segmento.

La conservación de la longitud debe evaluarse en función de la conservación luego de movimientos y cambios de forma, teniendo en cuenta que en las primeras etapas el niño evalúa la longitud fijándose sólo en los extremos, independientemente del movimiento o del cambio de la forma.

Como hemos visto, son muchos los aspectos a considerar, aspectos que se consolidan a partir de un recorrido que debe ser apoyado con actividades específicas. Tener en cuenta los diferentes momentos del proceso no implica pensar en que los mismos sean compartimentos estancos o etapas rígidas. Implica tenerlos en cuenta a los efectos de diseñar secuencias de actividades que presenten problemas que permitan a los alumnos avanzar en este proceso.

[10] Chamorro, Ma. del C. y Belmonte, J. M. (1994).
[11] Chamorro, Ma. del C. y Belmonte, J. M. (1994).

Algunos problemas de la enseñanza de la medida

Como decíamos al comienzo, el aprendizaje de la medida presenta obstáculos epistemológicos y didácticos.

Siguiendo la línea de María del Carmen Chamorro[12], podríamos decir que estamos frente a un problema de transposición didáctica desequilibrado en el que se priorizan los aspectos mecánicos frente a la construcción de conceptos. Hay una invisibilidad didáctica que hace que algunos aspectos que deberían ser tratados en forma prioritaria se ignoren, obstruyendo de esta manera la posibilidad de construcción de los mismos por parte de los alumnos. Para evitar confusiones o contradicciones que no se sabe muy bien cómo tratar dada la complejidad del tema, se tiende a ignorar las prácticas efectivas y a dejar para más tarde las aclaraciones teóricas, restringiendo este aprendizaje a un saber escolar débilmente utilizable.

En nuestro Programa Escolar el tema de las magnitudes y su medida se integra bajo el rótulo mediciones. Como primer punto para primer grado aparece el tratamiento de las unidades arbitrarias y convencionales. En los grados siguientes se realiza un planteo similar pero sólo con relación a las unidades convencionales. Los submúltiplos de las mismas se agregan uno por grado coincidiendo – sin que se lo explicite- con la presentación de las fracciones decimales y la escritura decimal correspondiente al orden de los submúltiplos presentados. Se agregan año a año otras magnitudes. Toda la presentación está atravesada por un fuerte énfasis en las equivalencias de unidades del Sistema Métrico Decimal (SMD).

Un gran número de contenidos se hacen invisibles en el currículo. A modo de ejemplo podríamos mencionar los criterios de ordenación, construcción y sentido de la graduación, técnicas de medición, el rápido "pasaje" del trabajo con unidades arbitrarias a unidades convencionales.

Esto hace necesaria una "lectura" del Programa Escolar por parte del docente que, a partir de los contenidos explicitados y de sus conocimientos teóricos sobre el tema, le permita desagregar el contenido magnitud y medida con criterios didácticos. La planificación de secuencias didácticas que aborden en cada grado y a lo largo del ciclo escolar todos los aspectos que el tema implica, sería un apoyo para superar la transposición desequilibrada que mencionábamos.

En función de lo expresado podemos enumerar[13] algunos aspectos de las prácticas usuales que pueden obstaculizar los avances de los alumnos en la construcción de este conocimiento y que deberían ser tenidos en cuenta a la hora de planificar las secuencias a las que nos referíamos.

· Al no realizarse mediciones efectivas, no se adquiere la práctica de la medición. De igual manera no se puede analizar el proceso de medición con todas las dificultades que supone.

· No se analiza el error inherente a la medida. Como consecuencia se obtienen resultados únicos y a veces alejados de la realidad.

· La ausencia de mediciones efectivas deja fuera de las prácticas escolares algunas situaciones relativas a la medida como son la aproximación y el tratamiento del error.

[12] Chamorro, Ma. del C y Belmonte, J. M. (1994).
[13] Basado en Chamorro, Ma. del C. (2003).

· En general se confunde el instrumento de medición con la unidad. Los alumnos dicen usar para medir "la regla", no se tiene conciencia de la unidad, ni de la iteración de la misma que se representa en la graduación de este instrumento.

· El uso de objetos soporte representados en el microespacio, casi siempre dibujados y matematizados (es el caso del perímetro, la superficie y el volumen en polígonos y poliedros respectivamente), dificulta el reconocimiento en la realidad de las magnitudes en los objetos que nos rodean y hace casi imposibles las acciones en referencia a la medida.

· El trabajo con los objetos dibujados no pone en juego la estimación. En consecuencia cuando se obtiene un resultado no se sabe evaluar el orden de magnitud de acuerdo al problema presentado.

· La medida de los objetos sobre los que se va a trabajar está dada. Por lo tanto se plantean problemas en cuyos datos hay medidas asumiendo que se está trabajando mediciones cuando en realidad los alumnos trabajan con números que no refieren para ellos a ningún conocimiento sobre las magnitudes y su medida. Se trabaja con números y no con medidas. Se opera con ellos, se ordenan, se comparan, etc., es decir se "aritmetiza la medida".

· Los instrumentos geométricos e instrumentos de medición se confunden tanto en su función como en el uso dado en la escuela, así como se abusa de las mediciones en problemas vinculados a Geometría sin tener en cuenta los problemas propios de la medida.

· En cuanto a la elección de la unidad, en general ésta es elegida menor que el objeto a medir y casi siempre permite ser iterada un número entero de veces sobre la cantidad de magnitud a medir. Esta situación lleva a que sus subdivisiones sólo se presenten cuando se trabaja dentro del Sistema Métrico Decimal.

· La presentación de una sola medida para una cantidad, obstaculiza identificar que aún cuando se obtengan diferentes medidas para una cantidad, ésta no varía y por lo tanto que una misma cantidad puede expresarse con infinitas medidas en función de la unidad usada.

· El tratamiento del cambio de unidades que es un problema clave para comprender el concepto de medida, utiliza un procedimiento apoyado fundamentalmente en los algoritmos y en las memorizaciones de recursos altamente didactificados. Construir la relación entre unidades es un proceso complejo que necesita no sólo de la manipulación con unidades y fracciones de las mismas sino de discusiones, confrontaciones y reflexiones para poder establecer que a mayor unidad, menor es la medida.

· No se asegura la comprensión de las relaciones entre diferentes unidades y sus equivalencias para acercarse a la conservación de la cantidad de magnitud.

· Se enfatiza el trabajo con unidades convencionales. Sin embargo, es necesario además trabajar con unidades no convencionales junto al tratamiento del Sistema Métrico Decimal. Esto permite reflexionar acerca de las ventajas de un sistema que se apoya en el Sistema de Numeración Decimal.

Los aspectos enumerados, producto de las prácticas habituales, pueden generar obstáculos en el acercamiento de los alumnos al concepto de medida. Tenerlos en cuenta a la hora de planificar, permitirá proponer actividades que problematicen los distintos aspectos de este contenido.

Aspectos del contenido "Medida" que deberían abordarse durante la escolaridad.

Intentaremos un recorrido de los aspectos que sería necesario abordar con relación al estudio de las magnitudes y la medida, algunos de los cuales hemos ido mencionando. Si bien todos los aspectos están relacionados, los agruparemos en tres grandes áreas al sólo efecto de facilitar el análisis: aspectos relativos a la cuantificación, aspectos relacionados con el proceso de medición, aspectos relativos a la estimación y al orden de magnitud.

Aspectos relativos a la cuantificación

COMPARACIÓN Y MEDIDA

Uno de los momentos esenciales del trabajo en mediciones es el pasaje de la comparación directa a la comparación mediante el uso de un intermediario que se constituye en unidad. Cuando la comparación directa no es posible se hace necesaria la determinación de una cantidad de la misma magnitud que oficie como intermediario entre ambas cantidades. Esta cantidad de magnitud, que es siempre arbitraria, es la que denominamos unidad.

Realizado el procedimiento de medición el alumno deberá contar la cantidad de veces que esta cantidad de magnitud contiene a la unidad, adjudicándole por medida el número resultante del conteo. La razón entre la cantidad a medir y la unidad es el valor de la medida.

El diseño de situaciones específicas pondrá en evidencia que el número solo no es suficiente si no se explicita cuál es la unidad usada, obteniendo de esta manera una medida concreta[14].

Por ejemplo expresar 1,23 o 123 como medida de una longitud no es suficiente porque no nos informa sobre la magnitud medida ni sobre la medida concreta de esa cantidad de magnitud si no indica la unidad considerada, que en este caso podría ser metros o centímetros.

En este sentido es importante "pensar" la medida como una razón entre la cantidad a medir y la cantidad usada como unidad. Esta apreciación como razón nos permitirá más adelante vinculaciones con el conjunto de los números racionales. Es necesario diseñar actividades específicas para que los alumnos puedan establecer estas relaciones.

ELECCIÓN DE LA UNIDAD

La elección de la unidad se relaciona fundamentalmente con un problema de comunicación, de tal modo que si es el mismo sujeto quien va a usar esa medida es posible usar cualquier cantidad de esa magnitud como unidad, si se va a comunicar a otro que está presente, basta con tener la representación de esa unidad, en un hilo, por ejemplo, para el caso de la longitud. Por el contrario si la medida debe ser comunicada a otros, es necesario usar unidades universales.

Sin duda las unidades no convencionales son tan útiles como las convencionales dependiendo de la situación. El apresuramiento por presentar en el aula las unidades del SMD puede obstaculizar la construcción de la idea de unidad así como de la conveniencia de su universalidad.

[14] Hacemos referencia a los entornos de medida analizados por Brousseau (1991) referidos en las páginas 2 y 3.

El aspecto que sí debe ser tenido en cuenta es la adecuación de la unidad a aquello que se quiere medir de manera de simplificar el procedimiento de medición.

EQUIVALENCIAS DE MEDIDAS

Otro aspecto que parece prioritario es la construcción de las equivalencias como expresiones de la misma cantidad en función de unidades diferentes. Las prácticas habituales reducen ese aspecto a numerosos ejercicios de equivalencias de "medidas ficticias" propuestas por el docente, que se realizan mecánicamente teniendo en cuenta una tabla o las reglas de multiplicación o división por las potencias de diez que carecen, en general, de sentido para los alumnos.

Sería importante realizar equivalencias de medidas de todas las magnitudes, no necesariamente con unidades convencionales, desde los primeros grados. Usar como unidades de longitud por ejemplo, las antropométricas así como otras no convencionales elegidas por los alumnos o por el docente en función del problema a resolver, dará lugar a establecer una serie de equivalencias interesantes.

Nos enfrentamos en el proceso de medir con los números racionales y los números reales. La práctica reiterada de situaciones que obliguen a enfrentar este problema de cambio de unidad pone en juego otro de los soportes de las equivalencias: si la unidad es mayor, es necesaria menor cantidad de esa unidad, por lo que el valor de la medida es menor pero la cantidad se mantiene. En tanto esta relación inversa entre unidad y medida no sea objeto de acción y reflexión, las equivalencias de medidas continuarán siendo una mecanización vacía de sentido.

Proponer este tipo de actividades ayudará a establecer relaciones entre diferentes unidades, haciendo aparecer por ejemplo relaciones del tipo inversas.[15]

FRACCIONAMIENTO DE LA UNIDAD

Sin duda el fraccionamiento de la unidad puede hacerse de manera absolutamente arbitraria. En los primeros enfrentamientos con este tipo de situaciones una de las cantidades en juego puede ser usada como unidad para medir otra. La necesidad de comparación de varias cantidades, enfrentará a los alumnos con la conveniencia de una unidad independiente de todas ellas y con la necesidad de fraccionamiento de la misma a los efectos de lograr el mayor acotamiento.

Enfrentar a los alumnos a la conveniencia de fraccionamientos de la unidad que se integren en un sistema de unidades, en el que las relaciones entre ellas sean "sencillas" es de suma importancia. Del mismo modo debería analizarse la conveniencia del uso de un sistema que se apoye en el sistema de numeración. Estas relaciones facilitan las equivalencias puesto que cada una de las unidades de magnitud, sus múltiplos y submúltiplos corresponden a órdenes del sistema de numeración, por lo cual el establecimiento de equivalencias se torna simple. A tal punto se da esta relación que muchas veces, por omisión de los aspectos enumerados anteriormente, los alumnos terminan trabajando con números, pero no con medidas.

Para concluir en esta "conveniencia" es necesario que los alumnos se vean enfrentados realmente a los inconvenientes y cálculos engorrosos que deben hacerse para buscar equivalencias cuando las unidades no mantienen "relaciones sencillas entre sí".

[15] Por ejemplo si la longitud de un segmento AB es $\frac{3}{2}\,u$, si tomáramos como unidad la longitud de ese segmento AB para medir u, obtendremos que $u = \frac{2}{3}AB$. Obsérvese que los números intervinientes sin considerar la unidad son inversos.

Aspectos relacionados con el proceso de medición

MEDICIÓN EFECTIVA

Partimos de la idea de que no se puede aprender sobre la medida y sus problemas si no se mide efectivamente en situaciones reales y con objetivos reales. Esto, que parece a primera vista una verdad indiscutible, no es lo que usualmente acontece. El concepto avanzará si los alumnos se ven enfrentados a los obstáculos que ofrece el procedimiento de medición, lo que se constituirá en un verdadero problema si el docente logra plantear situaciones en las que la medición sea necesaria y no se haga sólo por imposición docente. Las prácticas efectivas de medición que se efectúen en diferentes espacios (micro, meso y macro) habilitarán el uso de distintos procedimientos, distintos materiales y diferentes unidades.

MAGNITUD, CANTIDAD, MEDIDA

Uno de los problemas que deben enfrentar los alumnos es el de tomar decisiones sobre cuál de las magnitudes de las que un objeto es soporte es la que debe medirse de acuerdo al problema que se debe resolver. Es el alumno quien debe decidir si necesita la medida de la capacidad de un recipiente o de su altura; si es necesario medir el largo, el ancho, la altura, la superficie o el peso de una mesa de acuerdo a lo que se necesita hacer con ella, es decir cuál es la cantidad de magnitud que se debe medir para resolver la situación.

Una vez tomada esta decisión, el proceso de medición hará necesaria la iteración de una unidad sobre la cantidad de magnitud a medir, lo que supone el conteo del número de veces que la unidad está contenida en dicha cantidad. El número obtenido es la medida de esa cantidad. En general, en un primer momento, la medida se relaciona con el conjunto de los números naturales, procediéndose por acotamiento a los efectos de establecerla. Es un momento adecuado para distinguir las magnitudes discretas - conjuntos que se miden efectuando un conteo directo de los objetos - de las continuas, en las que es necesaria una subdivisión arbitraria de la cantidad en partes equivalentes tomadas como unidad para luego efectuar el conteo. Esto ayudaría a conceptualizar el resultado de un conteo como la medida de un conjunto, de manera que siempre medimos: cuando contamos objetos y cuando contamos unidades. Cuando contamos objetos la unidad está dada; es el propio objeto. Por el contrario, en el caso de las magnitudes continuas es necesario especificar cuál ha sido la cantidad de magnitud que se ha tomado como unidad. El par número - unidad es la medida concreta o el valor de la medida.[16]

La falta de situaciones que enfrenten a los alumnos a estos problemas puede traer como consecuencia la permanente ausencia de unidad en los resultados a los que se arriba, así como la constitución de un fuerte obstáculo para encarar el trabajo con las equivalencias de medida.

LOS INSTRUMENTOS DE MEDICIÓN

Otro de los aspectos a tener en cuenta es el uso de los instrumentos de medición. Las prácticas habituales presentan los instrumentos con su graduación, lo que puede ocasionar dificultades para comprender cuál es su función. De allí muchas veces derivan reales errores en la medición que se producen por ejemplo, por no hacer coincidir el "0" con el extremo del segmento en el caso de considerar la longitud o del semicírculo con uno de los lados y el vértice del ángulo en el caso de la amplitud.
Del mismo modo, muchas veces los alumnos no comprenden el significado de los números impresos en los instrumentos o de las divisiones que se encuentran marcadas en dichos instrumentos.

En nuestro Programa Escolar el uso de estos instrumentos se encuentra en el área de Geometría, identificando los instrumentos de Geometría cuya función es el trazado de rectas, de ángulos rectos o el transporte de distancias, con los instrumentos de medición cuya función es otra bien distinta. Lo que estos últimos hacen es auxiliar el conteo de unidades y facilitar los fraccionamientos de la misma.

[16] Hacemos referencia a los entornos de medida analizados por Brousseau (1991) citados en las páginas 2 y 3

El instrumento de medición para las magnitudes lineales es una escala que debe interpretarse. La construcción de escalas en las que primero se registre el resultado de iterar la unidad y posteriormente los fraccionamientos de la misma, debe ser construido por los alumnos movidos por situaciones que evidencien su necesidad a los efectos de lograr un uso comprensivo de los instrumentos, no confundiendo éstos con la unidad usada. Por ejemplo si se debe medir una cantidad grande con una unidad muy pequeña, esto se tornará en un proceso incómodo, engorroso y poco preciso. Esto podría poner en evidencia la conveniencia de marcar la iteración de la unidad sobre una banda de papel (en el caso de las longitudes) y usar ese instrumento soporte para realizar el conteo de unidades. Más adelante y cuando sea pertinente a la situación habrá que "señalar mitades y/o cuartos y/o décimos" en las unidades marcadas en la banda. De esta forma se irá construyendo la escala graduada para medir longitudes lo que permitirá después una mayor comprensión en el uso de otras escalas (reglas, vasos medidores de capacidad, transportador, etc.)

ELECCIÓN DE LA UNIDAD[17]
Otro aspecto a tener en cuenta es que se debe propiciar que sea el alumno quien determine la unidad a usar de acuerdo a aquello que se quiere medir y al uso que se va a hacer de esa medida. Esta situación se suma a la que ya habíamos analizado en relación con determinar cuál de las cantidades de magnitud de un objeto es la que se hace necesario medir en función del problema. Por lo tanto, una situación de medición exige del alumno la toma de una serie de decisiones, lo que implica poner en juego conocimientos acerca de la medida, oportunidad que no se presenta si el docente plantea la situación con las medidas dadas.

INTERVALO, ACOTAMIENTO, CIFRAS SIGNIFICATIVAS
Realizado el procedimiento de medición, queda por resolver el problema de la incertidumbre inherente a la medida. Se podrá analizar el hecho de que la medida resultado de una práctica efectiva nunca es exacta habiendo siempre un orden de incertidumbre que es inherente al acto de medir. Ello debe discutirse con los alumnos a los efectos de establecer los márgenes de error o incertidumbre que la propia actividad determina como lógicos.

Realizar un proceso de medición efectiva implica la iteración de la unidad sin "montajes" ni "huecos", la asignación del número correspondiente y la discusión en torno a distintas aproximaciones. La comprobación de que no obtenemos siempre la misma medida de una misma cantidad, la discusión del intervalo posible a establecer o de la variación que una pequeña diferencia puede producir en un cálculo, son discusiones que deberían darse a menudo en clase y no saldarse con la adopción de la medida "exacta", establecida por el docente. De otra forma, la naturaleza y el origen de los errores permanecen para los alumnos, no solamente misteriosos sino amenazadores pues se confunden con una falta. En cambio, con los diferentes resultados recogidos a partir de una medición, se podrá obetener una "nube"[18] de resultados que permitirá establecer relaciones y diversos procedimientos para acordar la medida que se considerará. Sería un buen paso interrogarse al menos por las desviaciones y los errores tomándose las variaciones inherentes al acto de medir como errores de medición y erradicar la idea de que la medida es exacta, idea ésta que es frecuente en nuestras aulas.
Sería útil y posible distinguir entre:

- Las desviaciones debidas a la elección del sistema numérico de referencia, por ejemplo, la utilización de la medida natural (con números naturales) no permite diferenciar ciertas magnitudes consideradas diferentes en el entorno. El problema es el mismo cuando se utilizan los decimales con un número limitado de cifras después de la coma.

[17] El ítem se reitera puesto que este problema se vincula tanto con el proceso de medición efectiva como con el proceso de cuantificación. La división se realiza al sólo efecto de un mejor análisis.
[18] El término "nube" refiere a la colección de medidas concretas recogidas en tanto sean pertinentes a la medición realizada.

· La elección de la unidad permite la utilización de números decimales, por ejemplo 13,21.

· Los errores ligados al cálculo: errores de redondeo.

· Las incertidumbres debidas a la apreciación del instrumento, o a imprecisión del instrumento de medida, a su falta de fidelidad, etc.

· Las incertidumbres ligadas a la inestabilidad del objeto medido o a las condiciones en que se realizó la medición.

· Las faltas: errores de procedimiento o de cálculo que hacen el resultado inaceptable. Los alumnos pueden aprender a identificar y a controlar el efecto de estos errores.

Los procesos de medición arrojan un intervalo de confianza es decir un entorno en que la medida concreta tiene sentido de acuerdo al instrumento utilizado. Para que este intervalo de acotamiento sea cada vez menor con el fin de lograr con los instrumentos que se dispone la mayor precisión posible, es necesario el fraccionamiento de la unidad.

Por lo tanto la expresión de la medida requiere de un acotamiento en un cierto intervalo que dependerá de la unidad usada y del instrumento elegido para realizar la medición pertinente a la situación. Se pueden presentar entonces diferentes casos según se usen instrumentos con diferentes graduaciones. Por ejemplo, es necesario medir el largo del salón de clase (6,54m). Si se usa una regla de longitud 1m, sin graduar, se obtendrá una medida que estará acotada entre dos valores naturales, es decir se podrá afirmar que la longitud del salón está comprendida entre 6m y 7m. Si se utilizara una regla graduada a decímetros, se obtendría un error de 1dm, porque el instrumento con esa graduación habilita a leer esa medida, es decir la medida estaría por ejemplo, en el intervalo 65dm - 66dm. A su vez si se tuviese una regla graduada a centímetros, entonces la medida que se obtendría tendría un error de 1cm, en nuestro caso sería 653cm- 655cm.

Aspectos relativos a la estimación y el orden de magnitud

La escasa presencia en las aulas de actividades de medición efectiva, puede obstaculizar el desarrollo de habilidades que permitan estimar. Consecuentemente la falta de esta habilidad impide manejar el orden de magnitud de una medida, lo que resulta en falta de control por parte de los alumnos de los resultados que obtienen.

"Estimar una cantidad es el proceso de obtener una medida sin la ayuda de instrumentos…"[19] En definitiva es la medida realizada a "simple vista" de una cantidad de magnitud de un objeto.

Sin embargo ese proceso de estimación tiene referentes muy fuertes en la realización de mediciones efectivas que den un marco para poder realizar comparaciones. La comparación es el aspecto básico de la estimación. Por ejemplo si es necesario estimar la altura de una puerta, esta se podrá comparar con la altura del sujeto que está realizando la estimación o el alto de la habitación donde se encuentre, logrando así un cierto encuadramiento de la cantidad

[19] Frías, A.; Gil, F. y Moreno, M, (2001).

de longitud de la puerta. Estos procesos de estimación deberían ser objeto de enseñanza ya que son importantes a la hora de acercarse al concepto de medida y en consecuencia a la posibilidad de evaluar la misma a partir del orden de magnitud obtenido.
La medición efectiva dotará de los necesarios referentes para lograr una estimación adecuada.

Como se ha visto las situaciones de medida deberían emerger de verdaderas situaciones problema que obliguen a los alumnos a desarrollar actividades concretas de medición, generando situaciones cuya posterior discusión irá acercándolos al concepto que nos interesa sea construido.

Una posible secuencia de actividades para el 3er nivel de la escolaridad.

Las siguientes actividades integran un posible recorrido que trata de atender con un ejemplo de cada tipo los diferentes aspectos a tratar, en este caso sobre longitud.

Actividad 1

Ordenar de mayor a menor las longitudes de:

· el contorno del fondo de la papelera
· el diámetro de la boca de la papelera
· el contorno de la tapa del cuaderno
· la altura del asiento de la silla
· la altura de la papelera

Objetivo: comparar longitudes usando un intermediario.

Comentarios

Se consideran longitudes similares a los efectos de que se haga necesaria la comparación.
La altura de la silla y de la papelera puede compararse directamente.
Las otras longitudes necesitan del uso de un intermediario para poder ser comparadas.

Se toma la base de la papelera con el fin de enfrentar las dificultades de medición de una curva cerrada. Se presenta aquí la necesidad de elegir un instrumento flexible para poder rectificarla y de determinar un punto para comenzar la medición.
Si lo comparamos con actividades en las que es necesario medir la longitud del contorno de cualquier polígono (por ejemplo el contorno de la tapa del cuaderno), la elección de un punto de referencia para comenzar la medición no se hace necesaria puesto que cualquiera de los vértices puede oficiar como punto de partida de la medición y además ésta puede realizarse con un instrumento rígido.

La inclusión del diámetro de la boca de la papelera obedece a la intención de establecer la diferencia entre longitud y distancia.

Actividad 2

a - Ordenar la longitud de los contornos de las figuras. (Anexo)

b - Expresar la medida del contorno de cada una de las figuras utilizando solamente los materiales dados[20]

[20] Figuras, hilos, pajillas, tijeras, cinta adhesiva.

Objetivo: ordenar y medir longitudes.

Comentarios
En esta actividad se utilizan figuras dadas a los efectos de asegurarnos las relaciones que buscamos entre las longitudes. Si la actividad N° 1 arrojara resultados que permitiesen establecer las mismas relaciones u otras de dificultad similar, se usarían esas longitudes para la presente actividad.

Se eligen longitudes entre las que se puedan establecer relaciones sencillas a los efectos de facilitar el uso de una misma unidad.

Actividad 3[21]

Expresar la longitud del contorno de la figura A utilizando como unidad
- la longitud del contorno de la figura E
- la longitud del contorno de la figura F[22]

Objetivo: relación inversa entre unidad y medida.

Comentarios
Se proponen relaciones que impliquen en el primer caso una unidad mayor que la cantidad a medir y en el segundo caso una unidad menor que ella.

En ambos casos es necesario el fraccionamiento de la unidad y en el segundo es necesaria además la iteración de la unidad.

La relación inversa entre unidad y medida se observa ligada a la idea de fracción: a mayor cantidad de partes, la parte es menor.
Es decir que la medida de A corresponde a 0,8E y también a 2F, lo que pone en evidencia esta idea de: a mayor unidad (F es mayor que E), menor medida (0,8 < 2).
Puede establecerse en consecuencia la medida como razón

$\frac{A}{E} = \frac{8}{10}$

$\frac{A}{F} = \frac{4}{2}$

y a partir de ello las relaciones existentes con el conjunto de los números racionales.

Actividad 4

a - Comunicar la medida del contorno de G[23] a dos de los equipos de la clase para que ellos puedan determinar un segmento de la misma longitud.
La información debe estar escrita de diferente manera para cada equipo
Puedes usar como patrones A, F y E

b - Una vez realizada la comunicación completa los espacios
1 A = ...E = ... F

[21] En las actividades siguientes llamaremos A a la longitud del contorno de la figura A, E a la longitud del contorno de la figura E y F a la longitud de la figura F, refiriéndonos a las figuras entregadas en la actividad 2.
[22] Son las mismas que las figuras de la Actividad 2.
[23] Se incorpora una nueva figura -G- cuyo contorno mide 2A y 1F, información que los alumnos no conocen.

Objetivo: equivalencia de medidas a partir de diferentes unidades.

Comentarios
Se pretende la medición efectiva de una curva con dos unidades diferentes y la comunicación de las medidas obtenidas. Para obtener estas medidas es necesario el fraccionamiento de la unidad usada.

Se plantean relaciones de equivalencia, que permitan acercarse a la idea de que una cantidad de magnitud puede ser expresada con infinitas medidas en función de la unidad usada.

Una vez obtenidas las diferentes medidas, se deberán establecer las relaciones de equivalencia entre las unidades en uso. Es decir que si la medida obtenida es 4A en un caso y 2F en otro, entonces 1A = 2F.
En este caso las relaciones que se plantean son las siguientes:

$1A = \frac{5}{4}E = 2F$

Actividad 5

A partir de los resultados de la actividad 3 completar la siguiente tabla

Unidad / Figura	F	A
F		
A		

Objetivo: establecer medidas equivalentes.

Comentarios
Se retoman las diferentes medidas para una misma cantidad de magnitud. En este caso se propone establecer la relación entre dos cantidades de magnitud, tomando cada una de ellas como unidad para medir la otra. De esta manera se podrá observar que una de las medidas se expresa por el inverso de la otra. Es decir que si A = 2B, entonces B = ½A.
Esto permite establecer nuevas relaciones entre la medida de magnitudes y el conjunto de los números racionales, así como reflexionar sobre la relación entre dos cantidades como razones, de manera que el orden de comparación determina cantidades inversas.

Actividad 6

Expresar la medida del contorno de las figuras A, E, F con números naturales

Objetivo: conmensuración de la unidad.

Comentarios
Se solicita la expresión de la medida utilizando el conjunto de los números naturales a los efectos de plantear la conveniencia de establecer una conmensuración que permita encontrar una unidad independiente de las trabajadas hasta ahora.

Actividad 7

Completa la tabla, expresando las cantidades de longitud en las unidades indicadas:

Longitud del salón	6m $\frac{2}{10}m$ $\frac{3}{100}m$	.........m	........dm	.........cm
Longitud A	1A	..........E	.... F	..........H

a - ¿Puede completarse toda la tabla?
b - ¿Qué requisitos son necesarios para poder completar cada una de las filas?
c - En caso de que alguna de las posibilidades no pueda completarse, busca la razón de ello.

Objetivo: sistema de unidades de medida.

Comentarios
Se utilizan las unidades no convencionales ya utilizadas en las actividades anteriores, agregándose una unidad H cuya relación con el resto de las unidades se desconoce. Es así que al desconocer la relación de la unidad H con el resto, no podemos establecer relaciones y equivalencias. Sin embargo en la longitud del salón tomada con unidades convencionales, no es necesario explicitarlas ya que conocemos de antemano las relaciones entre ellas porque forman un sistema de unidades de medida.

De esta manera se pone en evidencia la necesidad de que aunque no se trabaje con unidades convencionales para establecer las equivalencias es necesario explicitar las relaciones entre las unidades consideradas para poder llegar a establecer la medida sin problemas y las equivalencias entre ellas.

Reflexiones finales

Es usual escuchar en nuestras escuelas la afirmación que da nombre a este trabajo: "Medir es comparar".

La secuencia presentada intenta abordar, a modo de ejemplo, los aspectos referidos a:

- establecer las diferencias entre ordenar y medir,
- considerar la medida como razón,
- usar diferentes unidades convencionales y no convencionales,
- expresar con diferentes medidas una misma cantidad de magnitud,
- analizar la equivalencia de unidades así como la necesidad de crear un sistema para comunicar una medida,
- establecer relaciones con el conjunto de los números racionales y con el sistema de numeración decimal.

A partir del análisis del "asunto de medir" evidenciamos varios aspectos que determinan la complejidad del tema. Podemos preguntarnos ¿medir es comparar?, ¿qué entendemos por comparar? Si por comparar entendemos hacer explícito un cierto orden, por ejemplo, entre las longitudes de ciertos objetos, entonces al comparar no necesariamente estamos midiendo.

No lo estamos haciendo porque la situación no exige dar como resultado un número acompañado de una unidad utilizada para tal fin.

En definitiva, aparecen ciertos aspectos que quedan "oscuros" si solamente decimos que medir es comparar. En una comparación no es necesario informar la cantidad de magnitud en el objeto soporte que se está considerando, ni tampoco la unidad que se está teniendo en cuenta.

Hemos ido observando a lo largo del análisis del tema y en las actividades propuestas la necesidad de considerar la unidad así como la arbitrariedad de su elección. Además hemos dado cuenta de la "necesidad" de unificar unidades para que la comunicación de la medida se logre sin inconvenientes así como la necesidad de su fraccionamiento, lo que permite establecer las relaciones entre los submúltiplos y/o múltiplos entre ellos y con la unidad considerada. Esto nos llevó a considerar que dada una cierta cantidad de longitud con la unidad correspondiente, es decir la expresión de una medida, ésta es distinta si empleamos otra unidad, aún cuando la cantidad de magnitud es la misma

Sólo si estos aspectos han sido construidos caerá por no cierta la frase "medir es comparar". O al menos se completará, agregando que medir es comparar una cantidad de magnitud con otra cantidad de la misma magnitud usada como unidad expresando esta relación numéricamente.

Hay diferencias, diferencias que deben ser producto de un largo recorrido, de mucho tiempo de acciones y reflexiones, para el tratamiento de un contenido que necesita recuperar un lugar importante en las aulas, porque en realidad

"¿De qué sirve enseñar si no es para hacer comprender?[24]

[24] Lesbesgue, H. en Turégano, P.(1996).

ANEXO[25]

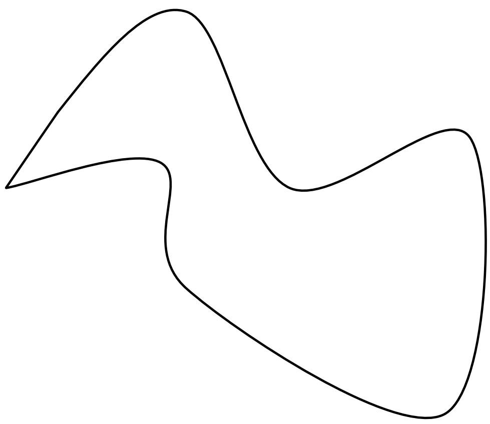

Figura A

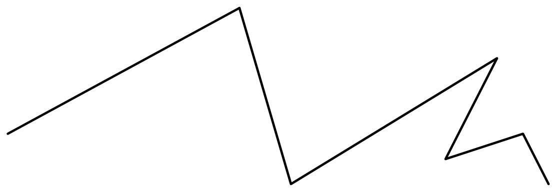

Figura F

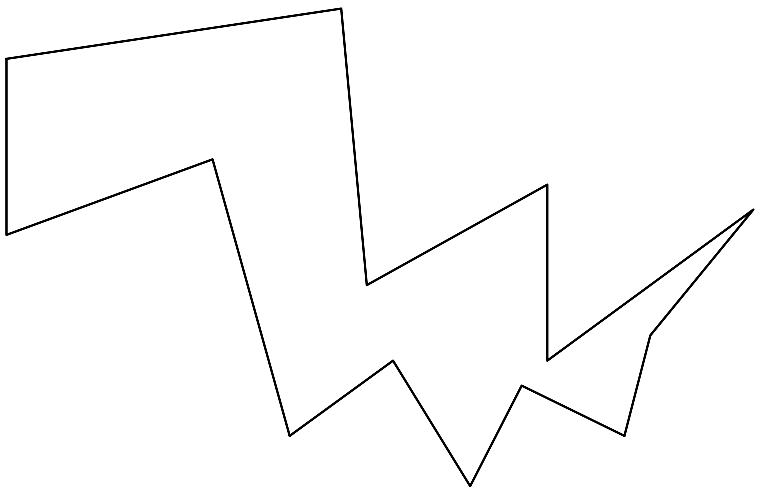

Figura E

[25] Medidas de contorno: A – 8U; E – 10U, F – 4U;

Bibliografía consultada

Brousseau, G. y Brousseau, N. (1991) - "El peso de un recipiente. Estudio de los problemas de la medición en CM." Gran N Nº 50. Burdeos.

Castro, E; Castro, E. (1989) - "Estimación en cálculo y medida." En Castro, E. (editor) *Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria*. Síntesis. Madrid.

Chamorro, Mª del C., Belmonte, J.M. (1994) - "El problema de la medida. Didáctica de las magnitudes lineales." Síntesis. Madrid.

Chamorro, Mª del C. (Enero 1995) - "Aproximaciones a la medida de magnitudes en la Enseñanza Primaria." Revista Uno. Nº 3. Grao. Barcelona

Chamorro, Mª del C. (2003a) – "Las dificultades en la enseñanza-aprendizaje de las magnitudes en Educación Primaria y Secundaria." Quehacer Educativo (Separata). Montevideo.

Chamorro, Mª del C. (2003b) - "Didáctica de las matemáticas". Pearson. Madrid.

Chamorro, Mª del C. (2003c) - "Diez recomendaciones sobre la enseñanza de la medida en la Formación Inicial de los maestros de primaria." Curso de Actualización en la Enseñanza de la Matemática para Inspectores de Educación Primaria. PMEM. Anep. Montevideo.

Frías, A.; Gil, F.; Moreno, M. (1989) - '"Introducción a las magnitudes y la medida: longitud, amplitud, tiempo." En Castro, E. (editor) *Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria.* Síntesis. Madrid.

Puig Adam, P. (1973)- "Geometría Métrica". Tomo I. Madrid.

Turégano, P. (Octubre 1996) - "Reflexiones didácticas acerca el concepto de área y su medida." Revista Uno Nº 10. Grao. Barcelona.

Vergnaud,G. - "Teoría de los campos conceptuales." http://mat.uv.cl/profesores/apuntes/archivos_publicos.

Vergnaud, G. (1991) - "El niño, las matemáticas y la realidad." Trillas. Madrid.

2/4 Y 1/2 ¿IGUALES O EQUIVALENTES?

¿Qué hacer en la escuela?
Programa para el Mejoramiento de la Enseñanza de la Matemática (PMEM) ANEP

Dr. Andrés Abella
Dr. Omar Gil
Prof. Ricardo Vilaró[1]

Resumen

¿Es correcto afirmar que 2/4 es igual a 1/2? ¿O es incorrecto, pero correcto sostener que ambas expresiones son equivalentes? Este debate parece merecer cierta atención en las aulas escolares y en el ámbito de formación docente.

A propósito de una pregunta al respecto, formulada por un asistente a la presentación del PMEM en una jornada organizada por la Inspección Nacional de Práctica del Consejo de Educación Primaria, en el Museo pedagógico, el jueves 6 de julio de 2006, desarrollamos nuestra visión sobre este asunto.

En esta nota intentamos mostrar que **es perfectamente adecuado referirse a ambas expresiones como iguales**, en tanto que, dependiendo del contexto, es muy forzado, o lisa y llanamente equivocado, considerarlas equivalentes. Fundamentamos esta conclusión en la sección 3, en tanto que en la 4 recomendamos que en las aulas de formación docente y de la escuela se preste poca o nula atención a la cuestión que nos llevó a escribir estas páginas.

En la sección 1 hacemos una introducción informal de los números racionales. En la 2 revisamos dos presentaciones de la noción de número racional, sólo con el propósito de analizar algunos aspectos teóricos necesarios para avanzar en las respuestas a las preguntas que abren este trabajo.

El lector más interesado por la presentación de los conceptos de número ante niños y adolescentes, o el que esté familiarizado con las distintas construcciones teóricas que los sustentan, bien puede leer en primera instancia las secciones 1 y 3 yendo sólo a las partes de la sección 2 que sienta necesidad de consultar. Hemos dispuesto un apéndice en el cual se repasa la noción de relación de equivalencia y sus propiedades básicas, pero que no encontramos imprescindible para la lectura del cuerpo principal del texto. Indicamos con N, Z, Q y R respectivamente a los conjuntos de los números naturales, enteros, racionales y reales.

[1] Integrantes del Programa para el Mejoramiento de la Enseñanza de la Matemática en ANEP

1.Breve introducción de los números racionales.

Comenzamos por remitirnos a una breve descripción del conjunto de los números racionales, tomada del hermoso y clásico texto ¿Qué es la Matemática? de Richard Courant y Herbert Robbins [2]. *Los números enteros son abstracciones del proceso de contar colecciones finitas de objetos. Pero en la vida diaria no es suficiente poder contar objetos individuales, es preciso también medir cantidades tales como longitudes, áreas, pesos y tiempo. Si se quiere operar sin obstáculos con las medidas de estas cantidades, que son susceptibles de subdivisiones arbitrariamente pequeñas, es necesario extender el campo de la aritmética más allá de los números enteros. El primer paso será el de reducir el problema de la medida al de contar.*

Comenzaremos por elegir, de modo completamente arbitrario, una unidad de medida. (...) Luego, contaremos el número de esas unidades contenidas en la cantidad que deseamos medir. (...) Sin embargo, el proceso de contar no es suficiente en general, ya que la cantidad dada puede no ser exactamente medible mediante múltiplos enteros de la unidad elegida. (...) Cuando esto ocurra, avanzaremos un paso introduciendo nuevas subunidades, obtenidas por subdvisión de la unidad inicial en un cierto número n de partes iguales. (...) En el simbolismo de las matemáticas, una subunidad obtenida dividiendo la unidad inicial en n partes iguales se designa con el símbolo 1/n; y si una cantidad contiene exactamente m de estas subunidades, su medida se denota con el símbolo m/n. Este símbolo se llama fracción o razón. El paso siguiente, sólo se dio de modo consciente después de varios siglos de tentativas. El resultado fue que el símbolo m/n quedó desposeído de referencias concretas a procesos de medidas y a las cantidades medidas, y fue considerado simplemente como un número, un ente en sí mismo, en el mismo plano que los números naturales. Cuando m y n son números naturales, el símbolo m/n se llama número racional.

Continúa luego *junto a las razones prácticas que indujeron a la introducción de los números racionales, existen otras (...) de carácter aritmético y típicas de una tendencia dominante en el proceso matemático. En la aritmética ordinaria de los números naturales se pueden efectuar siempre las dos operaciones fundamentales: adición y multiplicación. En cambio, las operaciones inversas no son siempre posibles.*

Efectivamente, la operación inversa de la adición es la resta. Sabemos desde el primer año escolar que esta operación no es siempre posible en el marco de N, el conjunto de los números naturales. Entonces para que, por ejemplo, la diferencia

$$3 - 10$$

esté definida es necesario colocarse en un conjunto numérico más grande llamado el conjunto de los números enteros Z. En Z el resultado es un nuevo tipo de número, el entero negativo -7.

Algo similar ocurre con la división, operación inversa de la multiplicación. No hay ningún número entero que multiplicado por 2 arroje el resultado 3. En otras palabras, la ecuación

$$2x = 3$$

no tiene ninguna solución en el conjunto de los números naturales. Tampoco en el de los enteros. En cambio, la ecuación

$$2x = 4$$

tiene $x = 2$ como única solución en ese conjunto numérico.

Ocurre que la ecuación $ax = b$, donde a y b son dos números enteros cualesquiera, tiene solución entera si y sólo si b es un múltiplo de a. Por lo tanto, para poder resolver estas ecuaciones con toda generalidad se hace necesario ampliar el concepto de número. *Extender un dominio por la introducción de nuevos símbolos, de tal modo que las leyes que valen en el primero continúen rigiendo en el segundo, es uno de los aspectos del proceso de generalización característico de la matemática. La generalización del concepto de número natural al de número racional satisface, por una parte, la necesidad teórica de suprimir las restricciones a la sustracción y a la división, y cumple, por otra la necesidad práctica de tener números para representar los resultados de mediciones. Del hecho de que los números racionales satisfagan esa doble necesidad resulta verdaderamente su gran importancia. (...)*

Esta extensión del concepto de número ha sido posible por la creación de nuevos números en la forma de símbolos abstractos tales como 0, -2 y 1/4. Hoy acostumbrados como estamos a tratarlos como cosa corriente, resulta difícil creer que hasta el siglo XVII no fueron admitidos con los mismos derechos que los enteros positivos y que, aunque usados cuando se hacían necesarios, no era sin ciertas dudas y prevenciones. A la natural tendencia humana a apoyarse en lo concreto, y como tales aparecían los números naturales, se debe la lentitud con que se dio este paso inevitable. Únicamente en el dominio de lo abstracto puede ser creado un sistema satisfactorio de aritmética [2].

Es así que los números racionales se conocen y emplean desde la antigüedad. Ya los pitagóricos intentaban explicar el mundo en términos de razones entre números enteros. Pero la preocupación por construir una teoría rigurosa que justificara y fundamentara su existencia es muy posterior. Sin considerar esta cuestión, los matemáticos operaron por siglos con ellos de una manera que, examinada desde los estándares actuales de rigor, resulta insatisfactoria. *Uno de los hechos más sorprendentes en la historia de la matemática es que no se acometiera la fundamentación lógica del sistema de los números reales hasta finales del siglo XIX. Hasta ese momento no quedaron establecidas ni siquiera las propiedades más simples de los números racionales positivos y negativos y de los números irracionales, ni habían sido definidos estos números. (...) La comprensión intuitiva de esos números parecía suficiente y los matemáticos se contentaban con operar con esa base* [6].

Efectivamente, estas cuestiones quedaron fuera del foco de atención de muchas generaciones de científicos, hasta que la dificultad para interpretar los procesos del paso al límite y las paradojas del infinito hicieron crisis y se hizo necesario examinar de cerca los cimientos de todo el edificio intelectual que hasta entonces se había construido. Recién en el siglo XIX, cuando en la matemática ocurre un proceso de revisión de los conceptos más básicos, que entre otros efectos condujo a la aritmetización del análisis, y se formalizaron diversas estructuras geométricas y algebraicas, se hizo patente la necesidad de contar con una fundamentación sólida de las estructuras numéricas.

Destacamos dos posibles construcciones del conjunto de los números racionales, que resultaron del proceso de revisión de los fundamentos que acabamos de describir:

1. La primera sólo requiere el conocimiento previo del conjunto Z de los números enteros. A partir de ellos se construyen de manera rigurosa los números racionales mediante una relación de equivalencia en un cierto conjunto de pares de números enteros, que identifica todas las parejas que al dividir dan el mismo resultado.

2. La segunda presupone conocido el conjunto R de todos los números reales, e identifica a los números racionales como un cierto subconjunto de R.

En la actualidad, ambas son relativamente corrientes en diversos cursos y libros de texto. Las presentaremos sucintamente a continuación en la sección 2. Desde ya adelantamos al lector que en cualquiera de ellas es perfectamente correcto y tiene pleno sentido decir que 1/2 y 2/4 son iguales, en el sentido de que ambas expresiones son dos maneras diferentes de representar el mismo número racional.

2.Dos posibles presentaciones de los números racionales.

Presentamos en esta sección dos construcciones rigurosas del conjunto Q de los números racionales. No seremos exhaustivos en el desarrollo y omitiremos unos cuantos detalles, pero todas las afirmaciones que aparecen en esta sección pueden deducirse de los axiomas y definiciones que haremos explícitos, sin pérdida de rigor, ni necesidad de apelar a la intuición para justificar las propiedades de este sistema numérico.

2.1 De los naturales a los enteros y luego a los racionales.

Para comenzar admitamos como conocidos a los números naturales, es decir los números de la forma 0, 1, 2, 3... y sus propiedades básicas respecto a la suma, producto y orden. Un punto de partida para ello puede ser, por ejemplo, la axiomática de G. Peano (1858-1932) o una construcción basada en la teoría de conjuntos. En realidad no es demasiado importante escoger un procedimiento u otro, porque al final lo que importa son las propiedades de los números naturales. A efectos prácticos, tal como destacaba la cita de [2], interesa especialmente el hecho de que estas propiedades están en correspondencia con muchos aspectos del mundo real. En particular, con todo lo que tiene que ver con contar y manipular colecciones de objetos.

El enfoque axiomático es bastante conveniente en este sentido, porque introduce las propiedades básicas necesarias para trabajar y evita la construcción de los conceptos a partir de objetos cuya existencia hemos aceptado previamente. Pero antes de seguir avanzando observemos que la presentación axiomática de Peano fue introducida en 1889. ¡Cuánta matemática y qué variada produjo la humanidad antes de esa fecha! En cualquier caso, digamos que no nos interesa desarrollar mucho este aspecto de la teoría que cae fuera de la discusión que motiva este artículo. En lo que sigue nos centraremos en los problemas de construcción de los números enteros y racionales, que van más directamente al punto en cuestión.

2.1.1 La construcción de los enteros y un comentario de yapa.

Una idea básica para construir los enteros a partir del conjunto N de los números naturales es introducirlos como los resultados de todas las posibles restas de naturales. Por ejemplo, podemos considerar que -3 es 7 - 10 o 1 - 4. Naturalmente estas restas no son posibles en N, pero el hecho de que arrojen el mismo resultado puede expresarse en términos de sumas, porque la igualdad"

$$7-10 = 1-4,$$

totalmente carente de sentido en N, es equivalente en cualquier contexto razonable a

$$7+4 = 1+10.$$

Esta última expresión sólo involucra sumas entre naturales. Una operación completamente lícita, para cualquier elección de los valores de los sumandos. Este hecho es la clave para la construcción.

Entonces aceptaremos que tanto la pareja (7,10) como (1,4) representan el mismo número -3, que desearíamos escribir como una cualquiera de las restas 7-10 o 1-4, imposibles en N. En general, cualquier número entero quedará representado por una resta de naturales, en la forma

$$m-n.$$

Cuando *n* es mayor que *m* estamos aludiendo a un número negativo. Cada entero se describe entonces mediante una pareja (*m,n*) de naturales. Pero puede haber varias de ellas que describan el mismo número. Ya vimos que en este marco conceptual (7,10) y (1,4) son dos representaciones posibles de -3.

La formalización de esto se hace a través de la idea de pensar que cada número entero es en realidad el conjunto de todas las posibles parejas de números naturales que lo representan. Dos representaciones distintas del mismo número quedan de esta forma identificadas entre sí y pasamos a considerarlas maneras diferentes de aludir al mismo entero.

Para implementar esta idea recurrimos a la noción de *relación de equivalencia*[2] y la aplicamos al producto cartesiano N x N, es decir al conjunto de todas las posibles parejas ordenadas de números naturales. Nuestra intención es declarar equivalentes a dos parejas

$$(m_1,n_1),\ (m_2,n_2)$$

de números naturales que correspondan a un mismo número entero. Formalmente, las parejas describirán el mismo número cuando

$$m_1 - n_1 = m_2 - n_2,$$

pero esta igualdad puede no ser lícita en el campo de los números naturales. ¡Recordemos que en este enfoque los números enteros aún no existen, estamos construyéndolos! Por lo que adoptamos la forma equivalente

$$m_1 + n_2 = m_2 + n_1,$$

que no tiene ningún problema, porque siempre podemos hacer la suma de números naturales.

Por lo tanto introducimos una relación de equivalencia $\sim$ en NxN, definida por

$$(m_1,n_1) \sim (m_2,n_2) \text{ si y sólo si } m_1 + n_2 = m_2 + n_1.$$

Es sencillo mostrar que efectivamente se trata de una relación de equivalencia. Cosa que no haremos, se trata de detalles que el lector puede completar o encontrar en la literatura. La relación de equivalencia divide al conjunto de parejas de números naturales en *clases de equivalencia*. En cada clase están agrupadas todas las parejas que son equivalentes entre sí.

Llamamos *número entero* a cada una de estas clases. Por ejemplo, todas las parejas

$$(0,4), (1,5), (2,6), (3,7) \ldots$$

son equivalentes entre sí y representan al entero -4. Este número es entonces igual a la clase

$$[(0,4)] = \{(0,4), (1,5), (2,6) \ldots \}.$$

La notación con corchetes [ ] es corriente cuando se trabaja con relaciones de equivalencia e indica la clase de equivalencia del elemento que está entre los corchetes. El conjunto formado por todas las clases de equivalencia es el conjunto Z de los números enteros, que extiende a N y al que también pueden extenderse las operaciones de suma y producto. Obviaremos los detalles, el lector interesado puede consultar, por ejemplo, la referencia [7]. Pero nos interesa destacar:

[2] En el apéndice se recuerdan las relaciones de equivalencia y sus propiedades básicas.

- una vez concluida la construcción lo importante es el conjunto numérico que hemos fabricado y las propiedades de sus operaciones. Para ningún efecto práctico representaremos al entero -4 como [(0,4)] o como [(21,25)]. Mucho menos como (0,4), pues estaríamos cometiendo el error conceptual de confundir la clase de equivalencia del elemento con el propio elemento;

- es también posible introducir los números enteros por procedimientos diferentes, que eluden su presentación como clases de equivalencia de números naturales. Ver, por ejemplo los comentarios sobre N y Z en la página 8 de esta misma nota, y la cita [1].

LA YAPA. Ya esbozamos la construcción de los enteros. Ahora la yapa. A los efectos de la discusión entre la igualdad y la equivalencia de 1/2 y 2/4, acotamos que no hemos escuchado jamás la propuesta de que es inadecuado o incorrecto decir que 2-3 es igual a 4-5 y que corresponde referirse a ambas expresiones como equivalentes. Todos admitimos que ambas son dos maneras diferentes de escribir el número entero -1, lo que es perfectamente lícito y riguroso. El problema que se suscita con las fracciones es completamente equivalente. ¿O igual?

2.1.2 La construcción de los racionales.

Una vez que hemos construido el conjunto Z de los números enteros y nos hemos familiarizado con él, la construcción de los números racionales discurre por un camino similar. Ante la imposibilidad de hacer en Z cualquier cociente de enteros con denominador no nulo tendremos que hacer una nueva extensión del campo numérico para poder manejar subdivisiones de la unidad. La división de 1 entre 2 o la de 3 entre 6 deberían arrojar el mismo resultado, pero son operaciones que no tienen sentido en nuestro marco numérico. Tal como la igualdad entre restas prohibidas en N debía poder reinterpretarse como una igualdad entre sumas legítimas en N, la igualdad

en el marco de la nueva teoría que pretendemos construir, tiene que ser equivalente a la igualdad

$$1\times 6 = 2\times 3,$$

que tiene pleno sentido en Z, donde siempre se puede multiplicar.

Repetimos entonces el procedimiento. Como antes definíamos números negativos por medio de parejas que sugerían restas, ahora introducimos números fraccionarios por medio de parejas que sugieren cocientes. Tenemos que tener la precaución de no dividir por 0, por lo que nuestras parejas estarán en el producto cartesiano

$$Z \times Z^*$$

siendo Z* el conjunto de todos los enteros no nulos, es decir

$$Z^*=\{n \in Z : n\neq 0\}.$$

En el conjunto Z x Z* de todas las posibles parejas ordenadas de enteros, donde el segundo es distinto de cero, definimos la relación de equivalencia

$$(p,q) \sim (r,s) \quad \text{si y sólo si} \quad p\times s = q\times r. \qquad (1)$$

El lector interesado en hacerlo, podrá completar los detalles para mostrar que (1) es una relación de equivalencia.

Dado *(p,q)* en Z x Z* llamamos   o *p/q* a la clase de equivalencia del par *(p,q),* es decir

$$\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{q}} = \left[(\mathrm{p},\mathrm{q})\right] = \left\{(\mathrm{r},\mathrm{s}) \in \mathrm{Z} \times \mathrm{Z}^* : \ (r,s) : \ (p,q)\right\}.$$

Por ejemplo

$$\frac{1}{2} = [(1,2)] = \{(1,2), (2,4), (3,6), (4,8),..., (-1,-2), (-2,-4), (-3,-6), (-4,-8),...\}.$$

Naturalmente, como (2,4) es otro representante de la misma clase, también tenemos

$$\frac{2}{4} = [(1,2)] = \{(1,2), (2,4), (3,6), (4,8),..., (-1,-2), (-2,-4), (-3,-6), (-4,-8),...\}.$$

Las expresiones $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{4}$ no son más que dos nombres diferentes, dos etiquetas diferentes, para designar al mismo objeto. Es así que cada número racional admite infinitas expresiones. Por ejemplo, aplicando esta observación al ejemplo de 1/2 tenemos

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \ldots \frac{-1}{-2} = \frac{-2}{-4} = \frac{-3}{-6} = \ldots$$

Llamamos conjunto Q de los *números racionales* al conjunto formado por todas las clases de equivalencia de la relación definida en (1). Naturalmente, a este conjunto pueden extenderse las operaciones de suma y producto. Estas operaciones en Q tienen todas las propiedades de las operaciones en ñ a las que se incorpora una nueva: en Q siempre es posible dividir por cualquier número diferente de cero. Un conjunto numérico con estas propiedades constituye lo que se llama un *cuerpo*. Una caracterización precisa de la estructura de cuerpo se encuentra en muchos lugares de la literatura, por ejemplo en [1,2,7]. Los detalles de esta construcción de Q se exponen en [7].

A modo de resumen, digamos que en este marco conceptual 1/2 es igual a 2/4 y el par (1,2) es equivalente con el (2,4). En particular 1/2 y 2/4 **no son equivalentes** para esta relación de equivalencia ya que ni siquiera pertenecen al conjunto Z x Z* en el cual está definida.

Una vez que hemos acabado con esta construcción, los números racionales ya son entes con existencia propia y no tiene mucho sentido remitirse a estos detalles. Detalles que sólo son técnicos y, como veremos a continuación al examinar otra presentación posible de los números racionales, para nada esenciales.

2.2 Los racionales como un subcuerpo de los números reales

Otra posible presentación de los números racionales consiste en mostrarlos como un subconjunto distinguido de un conjunto numérico aún más grande, el conjunto R de todos los números reales. Nos interesa desarrollar brevemente este enfoque, al que consideramos de un gran valor cultural, porque enfatiza la estructura del conjunto numérico que emplea nuestra civilización y brinda el contexto adecuado para entender a todos los números que suelen aparecer en la escuela, el liceo y la vida cotidiana.

El conjunto de los números reales tiene al menos dos características que lo hacen intuitivamente aprehensible:

1. Reúne a todos los números que tienen difusión más o menos generalizada en nuestra cultura[3]. Por supuesto, todos los números naturales, enteros y racionales están contenidos en Q. También están en Q algunos números célebres que no son racionales, como $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π, y la razón áurea $\left(1+\sqrt{5}\right)/2$. Otro número real muy importante es **e**, la base de los logaritmos neperianos. No es tan popular, pero aparece en el teclado de cualquier calculadora científica. También son números reales todas las posibles expresiones decimales infinitas que uno se pueda imaginar.

2. Los números reales están en correspondencia uno a uno con los puntos de una recta. Si en una recta fijamos un origen y le asignamos el 0 y colocamos una segunda marca para determinar una unidad de longitud, a la que asignamos el 1, entonces cada número real se corresponde con un sólo punto de la recta y viceversa.

Los números reales tienen además una caracterización axiomática muy sencilla. Son el único cuerpo ordenado y completo.

Que sean un cuerpo significa, a grandes rasgos, que en los números reales están definidas una suma y un producto que verifican las propiedades habituales de estas operaciones, entre la que destacamos el hecho de que existen todas las restas y siempre se puede dividir por un número cualquiera distinto de cero.

Que un conjunto sea un cuerpo ordenado significa que siempre se puede establecer una relación de mayor o menor entre los números, y que además ese orden guarda cierta armonía con las operaciones del cuerpo. Esto es lo que ocurre con el orden en Q y en Q. Hasta aquí no hay ninguna diferencia entre ambas estructuras numéricas.

La gran novedad de Q es que es completo. En términos geométricos esto pueden entenderse diciendo que cada punto de la recta corresponde a un número real. Si nos limitáramos a considerar sólo los racionales entonces quedarían infinitos puntos en la recta sin su correspondiente número. Por ejemplo, no dispondríamos de los puntos a distancia $\sqrt{2}$ o π del punto correspondiente a 0. También es equivalente a esta propiedad de completitud el hecho de que cualquier expresión decimal infinita defina un número real. Los números racionales sólo alcanzan para representar a unos pocos[4] de estos decimales: a los que a partir de cierto momento se vuelven periódicos, y empiezan a repetir una y otra vez la misma secuencia de cifras. Por ejemplo

0,3333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333...
253,56134652782430100012345678901234567890123456789012345678901234567890...

cuando se extienden de la manera obvia que estas expresiones sugieren, son expresiones decimales que corresponden a dos números racionales.

[3] Los números complejos, que quedan fuera de este marco, se usan en todas partes. Por ejemplo, nuestros sistemas de comunicaciones y de distribución de energía eléctrica están ahí porque sabemos calcular con números complejos. Sin embargo no son tan conocidos para el público general como los demás números que mencionamos en este item.

[4] Son pocos en relación con los números reales, pero forman un conjunto infinito y en la vida cotidiana trabajamos habitualmente sólo con una muy pequeña cantidad de ellos. Ver, por ejemplo, el análisis del infinito que se hace en la sección IV del capítulo 2 de [2].

Pero
0,1010010001000010000010000001000000010000000010000000001000000000...

extendido hasta el infinito siguiendo la regla de que cada secuencia de ceros que aparece entre uno y uno tiene un cero más que la anterior, no representa a un número racional.

La completitud de R es una propiedad fundamental, sobre la que descansan las buenas propiedades que este conjunto tiene para el análisis matemático y es la principal justificación para introducir este conjunto numérico. En esta construcción de tipo axiomático, asumimos la existencia de un conjunto R llamado el *conjunto de los números reales*, el cual tiene un orden y dos operaciones llamadas suma y producto que le dan una estructura de cuerpo ordenado y completo en el sentido que describimos anteriormente. Quizás no sea ocioso destacar, porque tiene que ver con el mismo tipo de discusiones acerca de la naturaleza de los objetos matemáticos que motivó la preparación de esta nota, que la completitud de los reales puede introducirse de muchas maneras diferentes, que dan lugar a teorías equivalentes. En el suplemento al capítulo 1 de [3] se examinan unas cuantas posibilidades.

La idea de la construcción de los racionales a partir de los reales es la siguiente. En R tenemos dos elementos distinguidos, 0 y 1, que son, respectivamente, el neutro de la suma y del producto. Definimos N como el conjunto formado por 0, 1 y todas los números que se obtienen sumando 1 repetidas veces. El conjunto Z se obtiene mediante todas las restas posibles de números naturales y Q se obtiene mediante todas los cocientes posibles de números enteros.

De esta forma obtenemos los números naturales, enteros y racionales dentro de los reales. En este enfoque, el conjunto Q de los números racionales aparece como el subcuerpo más pequeño de un cuerpo mayor cuya existencia se había aceptado previamente, en vez de ser la extensión de un dominio numérico preexistente. El texto [1] provee una descripción más detallada de esta presentación.

Para cerrar esta rápida descripción, observemos que en esta teoría en ningún momento se hacen construcciones con clases de equivalencia que justifiquen el hablar de equivalencias entre números racionales. La idea de que 1/2 y 2/4 sean equivalentes es completamente ajena a este marco conceptual, que por otra parte es perfectamente válido como manera de introducir los números racionales y los números reales.

3. Resumen y conclusiones dirigidas al profesor y al maestro

En la sección 2 hemos esbozado dos teorías diferentes que dan fundamento a la noción de número racional. Independientemente de sus detalles, que no son importantes a los efectos de esta sección, ambos procedimientos tienen como único objeto hacer una presentación rigurosa, libre de ambigüedades y de la necesidad de recurrir a imágenes externas para sostenerse, del sistema numérico. Se resuelve así en el plano lógico, o de los fundamentos de la matemática, el problema de construir las fracciones y otros números con los que todos los matemáticos, y muchos no matemáticos, trabajaron durante siglos, obteniendo resultados extraordinarios en el campo de la matemática y en el de sus aplicaciones científicas y sociales.

A los efectos de responder la pregunta que abre esta nota, destacamos

· las fracciones existieron antes de tener una fundamentación teórica;

· admiten varias maneras de ser introducidas. Presentaciones en principio muy diferentes originan distintas realizaciones del concepto número racional, todas con idénticas propiedades;

· tal como apuntábamos al final de la sección anterior, en la última de estas presentaciones ni siquiera tiene sentido la cuestión de preguntarse acerca de la equivalencia de 1/2 y 2/4 porque jamás se introduce una relación de equivalencia durante la construcción de los racionales;

· aún en la presentación que usa clases de equivalencia, la equivalencia es entre pares de números enteros, como (1,2) y (2,4), no entre símbolos como 1/2 o 2/4 que aluden directamente al número racional.

Creemos haber justificado entonces la afirmación de que es lícito y perfectamente riguroso hablar de igualdad entre las fracciones 1/2 y 2/4, o entre cualquier cociente de enteros que arroje el mismo resultado al operar en Q. Más aún, es básicamente inadecuado referirse a 1/2 y 2/4 como equivalentes, en vez de iguales. En primer lugar, ya observamos que esta idea de equivalencia carece de sentido en algunas presentaciones de Q. En segundo lugar, en el momento de operar con números raciones y aplicarlos en problemas, lo que importan son sus propiedades y no hay razón para permanecer atado a la construcción de Q como clases de equivalencia de parejas de enteros. Aún en el contexto de esta construcción, los símbolos 1/2 y 2/4 son dos maneras diferentes de aludir **a la misma clase de equivalencia** que **es** el racional un medio. A este nivel, ya no nos estamos preocupando por los representantes. Es cierto que en un plano coloquial de lenguaje podemos llegar a decir frases como que 1/2 y 2/4 son dos maneras equivalentes de escribir un mismo racional, porque en definitiva son dos símbolos diferentes que aluden al mismo objeto. Pero no es pertinente trasladar este registro de lenguaje cotidiano al contexto de la teoría que fundamenta Q por medio de clases de equivalencia.

Sin embargo, admitimos que hay un pequeño resquicio por donde se puede argumentar a favor de referirse a 1/2 y 2/4 como equivalentes: la igualdad es una relación de equivalencia. Es una relación trivial de equivalencia, pero de equivalencia al fin. Es posible entonces decir que 1/2 y 2/4 son equivalentes, siempre que aclaremos que la relación de equivalencia que estamos usando es ¡la de igualdad! Correcto, riguroso, pero estéril e insufriblemente pesado[5]. En resumen, mirando a la primera de las preguntas que da título a este artículo desde las teorías que sustentan la noción de número racional, consideramos que

· es correcto decir que 1/2 es igual a 2/4, y es lo más natural hacerlo, porque la afirmación tiene pleno sentido en los marcos teóricos actuales;

· puede ser correcto decir que 1/2 es equivalente a 2/4, pero para esto habría que aclarar que la relación de equivalencia que usamos es la de igualdad, lo cual no es para nada natural;

· es incorrecto afirmar que la afirmación de que 1/2 es igual a 2/4 es incorrecta.

[5] Aún así, este párrafo nos sirve para recordar algo: cuando se dice que dos objetos son equivalentes, siempre es necesario precisar cuál es la relación de equivalencia a la que se alude. ¿Cuál es la relación de equivalencia que está por detrás de la afirmación 1/2 es equivalente a 2/4? Si intentamos sostener la idea de la equivalencia para contestar esta pregunta, seguramente descubriremos que nos vemos forzados a interpretar 1/2 y 2/4 como una manera de aludir a los pares ordenados (1,2) y (2,4), objetos que no son números racionales. No tiene ningún fundamento ni sostén histórico, ni está justificado por el uso, caer en este extremo de despojar a la notación 1/2 o 2/4 de su significado habitual de aludir a un cierto número racional. En tanto 1/2 y 2/4 aludan a números racionales, son iguales. Y es completamente traído de los pelos inventar un nuevo significado a estos símbolos para tratarlos como equivalentes por la vía de forzar su inclusión en uno de los posibles marcos teóricos que dan sustento a la noción de número racional.

4. En el aula

¿Qué decimos a los niños de todo esto? ¿Dos fracciones son iguales o son equivalentes? ¿Tiene sentido introducir en un aula de primaria el símbolo de equivalencia cuando el signo de igual es más pertinente? ¿Qué aporta este presunto y desorientado aparente rigor a su proceso para comprender las fracciones y su uso en el cálculo o en la resolución de problemas?

No consideramos que esta cuestión de la construcción de los números racionales sea un problema pertinente para la Escuela ni para el Ciclo Básico. En el nivel de Formación Docente los futuros profesores y maestros deberán tener ideas acerca de cómo se desarrollaron y fundamentaron los conceptos de números, con diferentes grados de profundidad y detalle según a que subsistema se orienten, pero tampoco corresponde sobredimensionar esta cuestión de las posibles fundamentaciones del concepto de número racional.

Por otra parte si los matemáticos y la humanidad en su conjunto operaron durante siglos sin mayor drama con los números racionales e incluso con los números reales, sin la fundamentación acabada que se logró recién en la segunda mitad del siglo XIX, ¿por qué obsesionarse con la presentación en la escuela, incluso en la enseñanza media, de la fundamentación rigurosa de estos conceptos? ¿Se tienen en cuenta los obstáculos ontogenéticos y epistemológicos al tratar de trasladar inútilmente aspectos parciales e innecesarios de una teoría que es pertinente en niveles superiores alejados de la escuela? ¿Se es consciente de los obstáculos didácticos que se generan?

Pensando desde el punto de vista de la utilidad de las fracciones en la vida cotidiana. ¿Para qué las usamos habitualmente? Aparecen expresiones que involucran 1/2, 1/3, 3/4, que se manejan bien en términos intuitivos. Algunas otras en las que se mezclan con números enteros, como en un litro y medio. Pero habitualmente usamos en forma indistinta varias formas de representar a los racionales, por ejemplo el 1/2 kilo y los 500 gramos o para las botellas de 3/5 de litro el 0,6 litro, o los 600 mililitros. Poner a las fracciones en el contexto general del manejo de los números parecería ser un objetivo más razonable para la escuela primaria y la enseñanza media, que insistir sobre detalles teóricos, esencialmente técnicos.

Consideramos razonable en la perspectiva de enseñanza de una "matemática para todos" poner atención en el conocimiento cultural de las fracciones, el cálculo elemental con ellas, así como la comprensión de las fracciones como recurso para medir, como operador, como porcentaje, como relación. En este sentido, vale la pena mencionar que hay actividades más interesantes para trabajar con el sistema numérico y otros temas propios de los cursos de matemática en los niveles de bachillerato y formación docente, que detenerse excesivamente en la construcción de los distintos sistemas numéricos y que en esa dirección habría que apuntar los esfuerzos. Por otra parte, estos problemas de fundamentación de las teorías numéricas han dejado de estar en el centro de interés de las matemáticas contemporáneas. Se trata de cuestiones que tuvieron su importancia a fines del siglo XIX y comienzos del XX, pero en la actualidad el acento está en otros temas. En particular, durante el siglo XX la matemática ha cambiado mucho, han aparecido nuevas teorías, se han revitalizado antiguas.

Por ejemplo, una selección de problemas candentes de la matemática contemporánea puede encontrarse en [8]; el texto [4] presenta una muestra de tópicos que ilustran algunos aspectos de cómo la matemática de nuestra época impacta en la vida cotidiana de todas las personas; el artículo periodístico [5] contiene un apretado recorrido de ejemplos; la clasificación temática [9] adoptada por muchas bibliotecas matemáticas en todo el planeta, incluyendo las de nuestro país, ofrece una primera aproximación al paisaje de lo que es hoy la matemática.

Dentro de toda esta rica novedad hay muchísimas posibilidades para explorar conceptos matemáticos interesantes y formativos alrededor de temas cuya consideración aporte también a la comprensión del mundo en que el estudiante vive. En particular, de la parte del mundo formada por la propia matemática. Este esfuerzo sería mucho más valioso que continuar la discusión sobre el tema que nos ha ocupado en esta nota, o que mantener la atención sobredimensionada que tiene en nuestro sistema educativo la fundamentación de los sistemas numéricos.

Anexo:
relaciones de equivalencia

Recordemos que una relación que simbolizamos por ~ entre los elementos de un conjunto *A* es una *relación de equivalencia* si verifica las propiedades idéntica, recíproca y transitiva:

$$
\begin{array}{ll}
a : a, & \forall a \in A, \\
a : b \Rightarrow b : a, & \forall a,b \in A, \\
a : b \text{ y } b : c \Rightarrow a : c, & \forall a,b,c \in A.
\end{array}
$$

Supongamos que ~ es una relación de equivalencia en *A*. Dados , decimos que *a* es *equivalente* con *b* cuando *a* ~ *b*. Para cada elemento definimos la *clase de equivalencia* de *a* como el conjunto que simbolizamos por [*a*] formado por todos los elementos de *A* que son equivalentes con *a*, es decir

[a]={x A: x ~a}

Cuidar de no confundir un elemento *a* cualquiera de *A*, con su clase de equivalencia [*a*], que es un subconjunto de *A* formado por *a* y, posiblemente, por otros elementos de *A*.

Con esta definición obtenemos inmediatamente que [*a*] = [*b*] si y sólo si *a* ~ *b*. Al conjunto de las clases de equivalencia de *A* le llamamos el *conjunto cociente* de *A* por la relación de equivalencia ~ y lo simbolizamos por A/ ~ , es decir

A/ ~ = {[a]: a A}.

Observar que los elementos de *A*/ ~ son subconjuntos de *A*.
Por otro lado, dado un conjunto X, una familia[6] *P* de subconjuntos de *X* es una *partición* de *X* si verifica las siguientes condiciones:

$$
\begin{array}{ll}
Y \neq \varnothing, & \forall Y \in P, \\
\text{si } Y \neq Z \Rightarrow Y \cap Z = \varnothing, & \forall Y,Z \in P, \\
\text{si } x \in X \Rightarrow \exists Y \in P \text{ tal que } x \in Y. &
\end{array}
$$

Observar que la última condición equivale a pedir que *X* coincida con la unión de todos los elementos de *P* (que son subconjuntos de *X*).

Dado un conjunto *A*, hay una correspondencia uno a uno entre las relaciones de equivalencia en *A* y las particiones de *A*. Esta correspondencia viene dada en la forma siguiente:

- Si ~ es una relación de equivalencia en *A*, entonces el conjunto cociente *A*/ ~ es una partición de *A*.

- Si *P* es una partición de *A* y definimos una relación ~ en *A* mediante

$$a : b \Leftrightarrow \exists Y \in P \text{ tal que } a,b \in Y,$$

entonces ~ es una relación de equivalencia en *A*.

[6] Estamos llamando *familia* a un conjunto cuyos elementos son subconjuntos de un conjunto dado

La correspondencia anterior nos dice que en general hay muchas posibles relaciones de equivalencia sobre un conjunto dado. De hecho, hay tantas como particiones del mismo. Más importante que lo anterior es que dado un conjunto A no tiene sentido la frase "*a* es equivalente con *b*" a menos que se especifique cual es la relación de equivalencia. Veamos lo anterior con un ejemplo. Dado el conjunto

$$A=\{(1,2), (2,4), (3,6), (0,1), (0,2)\},$$

consideremos las siguientes particiones de A:

$P_1 = \{ \{(1,2), (2,4), (3,6)\}, \{(0,1), (0,2)\} \}$
$P_2 = \{ \{(1,2), (2,4)\}, \{(3,6)\}, \{(0,1), (0,2)\} \}$
$P_3 = \{ \{(1,2), (2,4), (3,6), (0,1), (0,2)\} \}$
$P_4 = \{ \{(1,2)\}, \{(2,4)\}, \{(3,6)\}, \{(0,1)\}, \{(0,2)\} \}$

La partición P_1 da lugar a una relación de equivalencia en la cual

$$(1,2) \sim (2,4) \sim (3,6), \quad (0,1) \sim (0,2).$$

Observar que esta relación coincide sobre A con la que utilizamos para definir Q a partir de Z.

La partición P_2 da lugar a una relación de equivalencia en la cual

$$(1,2) \sim (2,4), \quad (0,1) \sim (0,2).$$

En esta última relación el elemento (3,6) sólo es equivalente consigo mismo. Luego, a diferencia de lo que ocurría para la primera relación, resulta (1,2) no es equivalente a (3,6).

La partición P_3 da lugar a una relación de equivalencia en la cual

$$(1,2) \sim (2,4) \sim (3,6) \sim (0,1) \sim (0,2),$$

es decir que todos los elementos son equivalentes entre sí.

La partición P_4 da lugar a una relación de equivalencia en la cual cada elemento sólo es equivalente consigo mismo, es decir que esta relación es la de igualdad.

Observar que en las dos últimas relaciones, mientras en una todos los elementos son equivalentes entre sí, en la otra ningún elemento es equivalente con otro. Esperamos que este ejemplo clarifique la afirmación anterior de que no tiene sentido la frase "*a* es equivalente con *b*" a menos que se especifique cuál es la relación de equivalencia que se está considerando.

Agradecimientos

Agradecemos a Ariel Fripp, Rodolfo Louro y Beatriz Rodríguez Rava la lectura de este trabajo y sus observaciones.

Referencias

[1] **T.Apóstol,** (1999), Calculus, Tomo 1, Reverté.

[2] **R. Courant y H. Robbins,** (1958), Qué es la matemática?, Aguilar, Madrid.

[3] **R. Courant y F. John,** (1996), Introducción al cálculo y al análisis matemático, Tomo 1, Limusa, México.

[4] **COMAP, Las matemáticas en la vida cotidiana,** 1998, Addison-Wesley/ Universidad Autónoma de Madrid.

[5] **O. Gil,** Para Rafael Laguardia (II), Semanario Voces del Frente, 2007.
Disponible en http://www.fing.edu.uy/~omargil/educmate/RL2.doc

[6] **M. Kline,** (1972), El pensamiento matemático de la antigüedad hasta nuestros días, III. Alianza Editorial, Madrid.

[7] **J. Rey Pastor, P. Pi Calleja y C. A. Trejo,** (1952), Análisis Matemático, Tomo 1, Kapelusz.

[8] **S. Smale, Mathematical Problems for the next Century, The Mathematical Intelligencer 20**, 1998, páginas 7-15.
Disponible en http://www6.cityu.edu.hk/ma/people/smale/pap104.pdf.

[9] **Mathematics Subject Classification, AMS**, http://www.ams.org/msc/