Administración Nacional de Educación Pública
Consejo Directivo Central

CUADERNOS DE ESTUDIO

Gerencia General de Planeamiento y Gestión Educativa
Gerencia de Innovación Educativa
Programa para el Mejoramiento de la Enseñanza de la Matemática en ANEP

Administración Nacional de Educación Pública - Soriano 1045, 11100 Montevideo
Programa para el Mejoramiento de la Enseñanza de la Matemática en ANEP.

Diseño
Gustavo Rijo
Diseño Gráfico – CODICEN - Asilo 3255 Of.13
Tel.:481 9694

Impresión
ROSGAL

Depósito Legal
Número

ISBN
Número

ADMINISTRACIÓN NACIONAL
DE EDUCACIÓN PÚBLICA

CONSEJO DIRECTIVO CENTRAL

Director Nacional de Educación Pública
Dr. Luis Yarzábal

Sub-Director Nacional de Educación Pública
Prof. José Pedro Barrán

Consejeros
Mtro. Héctor Florit
Prof. Lilián D´Elía

Gerencia General de Planeamiento y Gestión Educativa
Gerencia de Innovación Educativa

Programa de Mejoramiento de la Enseñanza de la Matemática
Coordinador
Ricardo Vilaró

Responsables de la Publicación
Prof. Ricardo Vilaró
Prof. Beatriz Rodríguez Rava

ÍNDICE

Prof. Ing. Rafael Laguardia 5
Programa para el Mejoramiento de
la Enseñanza de la Matemática

Dr. Luis Santaló 7
Prof. Ricardo Vilaró
Programa para el Mejoramiento de
la Enseñanza de la Matemática

¿Qué Didáctica de las Matemáticas necesita la sociedad del Siglo XXI? 11
Dra. María del Carmen Chamorro.
Dpto de Didáctica de las Matemáticas de la
Universidad Complutense de Madrid. España.

Algunas reflexiones motivadas por la lectura del artículo "¿Qué Didáctica de las Matemáticas necesita la sociedad del Siglo XXI?" de la Dra. María del Carmen Chamorro. 21
Dr. Omar Gil. Instituto de Matemática y Estadística
"Prof. Ing. Rafael Laguardia" Facultad de Ingeniería.
Uruguay.

Sobre las reflexiones del Dr. Omar Gil 27
Dra. María del Carmen Chamorro.

Otras reflexiones 29
Prof. Beatriz Rodríguez Rava
Programa para el Mejoramiento de
la Enseñanza de la Matemática

RAFAEL LAGUARDIA

Programa para el Mejoramiento de la Enseñanza de la Matemática

El Programa para el Mejoramiento de la Enseñanza de la Matemática en la ANEP inicia la serie de CUADERNOS DE ESTUDIO con un reconocimiento al Prof. Rafael Laguardia a quien se le reconoce unánimemente como el inspirador, impulsor, forjador de lo que es posible denominar la "escuela uruguaya de matemáticos".

El Programa para el Mejoramiento de la Enseñanza de la Matemática en la ANEP en el marco de sus cometidos ha desarrollado estos años un esfuerzo de búsqueda, análisis y estudio, orientado a generar en su entorno y con los docentes que han colaborado y participado, la preocupación por afrontar los problemas de la enseñanza de la matemática y contribuir a la superación profesional de maestros y profesores.

En un trabajo de los matemáticos Rodrigo Arocena y Gonzalo Perez Irribarren[1] (1986) se afirma que "(…) hacer matemática, en la escuela o en la vanguardia de la investigación, es afrontar problemas. Aprenderla es, ante todo, desarrollar las aptitudes necesarias para resolverlos, lo que incluye la imaginación, la intuición y, muy especialmente, la costumbre de trabajar duro. Si hubiera que señalar cuál es el rasgo decisivo para desempeñarse en esta disciplina, nos inclinaríamos por algo que nada tiene de específico; a saber: la confianza en la propia capacidad de resolver problemas. Eso es lo que debe enseñarse y es en este sentido que también la educación matemática es una "práctica de la libertad", una preparación para el desempeño de la responsabilidad ciudadana.".

El profesor Rafael Laguardia realizó investigación matemática, practicó la docencia en Enseñanza Secundaria (ganador de Concurso de Oposición Libre en 1924) y en Facultad de Ingeniería (donde ingresó como estudiante y se recibió de Ingeniero en 1941) ganando en 1929 el concurso como Profesor Ayudante en Geometría Analítica. Se destacó por su preocupación por la enseñanza, por potenciar el error productivo – él mismo, intencionalmente, se equivocaba u omitía una condición en un teorema promoviendo una relación creativa y significativa en la comprensión de su demostración – por una profunda reflexión en torno a los problemas de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. El Dr. Enrique Cabaña afirma que "seguramente alguna parte de la mezcla de encanto y efectividad que irradiaban sus cursos, se debía a modalidades de su exposición, que más tarde nos comentaba a sus ayudantes de clase. Me refiero, por ejemplo, a que solía tratar algunos temas con especial cuidado y rigor, y otros de manera más ágil e informativa, logrando así un maravilloso equilibrio entre el cumplimiento de un programa ambicioso, y la enseñanza de métodos rigurosos de trabajo".[2]

José Luis Massera[3], quien jugó junto a Laguardia un rol muy destacado en todo el proceso de creación y desarrollo del IME, nos dice "Su carrera docente en la Universidad se prolongó sin interrupción hasta 1973, año en que fue expulsado de ella por la intervención. En su carrera llegó a ocupar cargos de Profesor Titular en las Facultades de Ingeniería (1953-1973) y de Humanidades y Ciencias (1946-1952). Dictó también clases en la Escuela Naval y dio cursos libres extracurriculares de matemática superior en el Instituto de Estudios Superiores (1929-1935).

[1] Arocena,R.; Pérez Iribarne, G. (1986) – "Ciencia y Tecnología". Centro de Investigaciones Económicas (CINVE). Ministerio de Educación y Cultura. Montevideo.
[2] Discurso en ocasión del homenaje realizado al Prof. Ing. Rafael Laguardia el viernes 2 de octubre de 1987 en la Universidad de la República.
[3] Massera, José Luis – "Los orígenes y el desarrollo de la escuela uruguaya de matemáticas". Disponible en Web: <http://www.cmat.edu.uy/~mordecki/massera/de/inteciencias.html>

Su formación de postgrado la realizó en la Universidad del Litoral (Argentina, 1943), bajo la dirección del Prof. Beppo Levi, en la Universidad de Harvard (EEUU, 1944-1945), bajo la dirección del Prof. Widder, y en la Universidad de Princeton (EEUU, 1945-1946), bajo la dirección de los Profs. Bochner, Chevalley y Lefschetz. En esas ocasiones y en años posteriores realizó diversos trabajos de investigación, obteniendo resultados importantes en la teoría de la transformación de Laplace y de sus iteradas, que fueron publicadas en la Argentina, en el Uruguay y en el Mathematische Annalen. Publicó además varios artículos de carácter docente y de divulgación científica. Fue un incansable promotor del desarrollo de las ciencias, particularmente de la Matemática, no sólo en el Uruguay sino en el ámbito más amplio de América Latina."

La creación del Instituto de Matemática y Estadística en el año 1942, del cual Laguardia fue su promotor, creador y Director por varias décadas, tuvo lugar en condiciones tan precarias como pioneras. Este Instituto abrirá cauce al cultivo creativo de la disciplina, a la formación de investigadores y ámbitos de producción científica en una clara y explícita mirada de largo plazo.

Recogemos del trabajo del Prof. J.L. Massera : "Recién en 1949 se empezaron a crear cargos rentados y algunas partidas para gastos de funcionamiento.

Pese a esas carencias iniciales y gracias a su justa orientación, a una dirección inteligente y laboriosa y a un esfuerzo intenso, sostenido y capaz de su personal, el IME se desarrolló exitosamente en las primeras tres décadas de su existencia. Fueron surgiendo sucesivas y cada vez más numerosas "generaciones" de matemáticos, en un proceso continuado de crecimiento. Para dar una referencia concreta, entre 1960 y 1965 su personal estaba formado por 8 profesores de alto nivel que, en ese lapso, publicaron unos 50 trabajos en revistas internacionales reconocidas y en las publicaciones de Instituto, que adquirieron prestigio en el mundo. La vida del IME era muy intensa y activa: decenas de jóvenes participaban de uno u otro modo en su actividad; dieron cursillos y cursos en él algunas decenas de profesores visitantes -entre ellos, matemáticos de la talla de A. Zygmund, L.Schwartz, P.R.Halmos, A.Denjoy, W.Ambrose, etc.-; becarios argentinos y brasileños concurrieron a especializarse en él; se llevaron a cabo numerosos Coloquios -no menos de 50 entre 1951 y 1958-. Esa labor fue abruptamente interrumpida por la intervención de la dictadura de 1973, que se ensañó muy particularmente contra el IME, su cuerpo docente, sus instalaciones, su biblioteca y hemeroteca especializados, interrumpió totalmente su actividad científica e incluso clausuró sus locales durante varios años".

El profesor Laguardia murió en 1980 durante la dictadura. No obstante, derrotada la dictadura los matemáticos uruguayos, todos ex - alumnos suyos, aunaron esfuerzos para asumir y proyectar su obra al futuro. Recrearon el IME que a partir de 1985 se denominó Instituto de Matemática y Estadística Rafael Laguardia (IMERL) y la Licenciatura de Matemática en la Facultad de Ciencias generando así las condiciones para proyectar e implementar los planes de Maestrías y Doctorados.

El legado de Laguardia abre el camino para que nuevas generaciones lo cultiven, lo recreen y lo proyecten en dos direcciones que es imprescindible desarrollar en permanente diálogo: la promoción de matemáticos creadores en la disciplina y el fortalecimiento y desarrollo profesional de quienes enseñan la disciplina. Esta interrelación es imprescindible para el enriquecimiento mutuo; aportando a la formación y desarrollo de docentes el clima, la forma de trabajo y el espíritu de creación que inspira la investigación y debe inspirar la docencia.

"Sólo los docentes formados en ámbitos ligados a la creación sabrán impartir una enseñanza creativa. Tendrán la capacidad para actualizarse periódicamente y recurriendo al lugar adecuado. De otra manera, la enseñanza cristaliza y se vuelve repetitiva, los programas se anquilosan y su renovación se hace a empujones, frecuentemente generados por modas que nos llegan cuando ya han perdido atractivo en su lugar de origen."[5]

[4] Massera, José Luis – Ob.cit.
[5] Arocena, R; Pérez Iribarne,G. Ob. Cit.

DR. LUIS A. SANTALÓ

Prof. Ricardo Vilaró

El Dr. Luis Antonio Santaló nació en Gerona, España, el 9 de octubre de 1911 en un ambiente familiar de maestros. En 1934 trabajó en Hamburgo con el matemático Blaschke donde se introduce de firme en la Geometría Integral, rama de la Matemática de la cual fue cofundador y referente obligado.

Al desencadenarse la guerra civil española, (1936-1939), Santaló se enroló con los republicanos en la Fuerza Aérea y actuó como profesor de una escuela de pilotos de aviación, aprendiendo y enseñando aerodinámica, navegación aérea, interpretación de mapas meteorológicos y otros temas que él no sabía. Tuvo que aprender en la marcha. Así aprendía en su propia experiencia a *aprender para enseñar y a enseñar para aprender.*

Luego, no sin correr riesgos, logró emigrar de los campos de concentración de republicanos en Francia a la Argentina, gracias a la acción de Cartan y de Rey Pastor, como ha quedado documentado en diversas publicaciones y relatos.

La Geometría Diferencial, la Geometría de los Cuerpos Convexos, la Teoría de Números, las Probabilidades Geométricas y la Teoría del Campo Unificado constituyen centros de sus trabajos y publicaciones produciendo trabajos de Matemática especializada con proyecciones y aplicaciones en diversos campos científicos y tecnológicos.

Sus publicaciones fundamentales incluyen libros tales como "Introduction to Integral Geometry", Hermann (París 1953) e "Integral Geometry and Geometric Probability", *Enciclopedia of Mathematics and its Applications,* Addison Wesley, Reading Massachusetts 1976.

Su libro "Tensores y Vectores y sus aplicaciones" editado por Eudeba (1961, Buenos Aires) abordó de un modo atractivo tópicos básicos en la formación de matemáticos e ingenieros.

No obstante, nuestro propósito es ofrecer a los maestros y profesores, y a los formadores de futuros docentes, una referencia respecto al inmenso aporte y preocupación que el Dr. Santaló dedicó a los problemas de la enseñanza de la Matemática en todos los niveles, en especial en la Enseñanza Media.

El Dr. Santaló dedicó gran parte de su vida profesional a los problemas de la enseñanza de la Matemática, preocupado por su convicción de que el desarrollo científico y tecnológico requería formar hombres creativos, capaces de comprender el mundo y de trabajar para que los avances científicos contribuyan al bienestar y al progreso social. El Dr. Santaló en sus escritos y conferencias insistía en la necesidad de que la educación promoviera como un valor el esfuerzo, reafirmando que se disfruta y descansa luego del esfuerzo, y el trabajo.
Combatía con firmeza las tendencias a la permisividad que, en lugar de estimular el despliegue de la formidable energía física e intelectual que supone enfrentar dificultades y desafíos, desmotiva a los alumnos y los desmoraliza.

La apelación a encarar una educación que valorice el esfuerzo y combata el facilismo mantiene plena vigencia y actualidad ante concepciones que promueven una evaluación permisiva que condiciona negativamente los procesos de formación de nuestros jóvenes en lo académico y respecto a las exigencias de la vida y el trabajo.
Subrayamos a continuación algunos factores que según el Dr. Santaló influyen en el desarrollo de una formación matemática efectiva[1]:

Matemática utilitaria y matemática abstracta: Las aplicaciones de la Matemática son el estímulo y, muchas veces, la guía de la Matemática pura; sin ésta, la Matemática aplicada se agota rápidamente y se convierte en poco tiempo en un cúmulo de recetas rutinarias sin perspectiva de progreso;

> ***Matemática adaptada a la realidad, significativa y flexible:*** la Matemática es a la vez arte, ciencia y técnica;
>
> ***Matemática generadora de opinión y capacidad crítica****;*
>
> ***Matemática reveladora de generalización****;*
>
> ***Matemática integradora de nuevos contenidos***: Aboga por la introducción en la enseñanza formal de nuevos contenidos, por ejemplo, probabilidad y estadística;
>
> ***Matemática activa:*** el alumno ha de participar en el aprendizaje y ha de sentirse motivado por los problemas.

En el mismo artículo se destacan los rasgos fundamentales de su línea metodológica: adaptar la enseñanza de las Matemáticas a los intereses del alumnado; cambiar los procedimientos metodológicos para obtener la participación del estudiante; promover el aprendizaje lúdico, el aprendizaje intuitivo, vivencial y manipulativo; potenciar la estimación de los resultados aproximados esperados; saber interpretar y potenciar la comunicación matemática; lograr la integración de las nuevas tecnologías.

Su producción ha sido muy vasta: artículos, conferencias y publicaciones. Deseamos hacer referencia a dos libros en especial: uno dedicado a la formación en geometría de los futuros profesores de Matemática de Enseñanza Media y el otro a la enseñanza de la Matemática en la Enseñanza Media.

En 1993, la editorial Red Olímpica edita su libro "La Geometría en la Formación de Profesores". En su página 11 leemos:
"Desde la antigüedad se distinguen dos objetivos principales de la enseñanza de la matemática, a saber: el **formativo**, destinado a cultivar y practicar el razonamiento lógico, y el **informativo**, destinado a enseñar las técnicas especiales que son necesarias para usar la matemática en sus aplicaciones, cada vez más extendidas en todas las ramas del saber. A veces se ha dado preponderancia al aspecto formativo, que da lugar a lo que hoy llamamos **matemática pura**, posición defendida tradicionalmente por Platón al proponer para los ciudadanos de su República el estudio de aquella matemática que tiene por fin el conocimiento y que "facilita al alma los medios para elevarse desde la esfera de la generación hasta la verdad y la esencia". El aspecto informativo, en cambio, constituye la hoy llamada **matemática aplicada** y era despreciada por Platón por considerarla destinada a los "comerciantes y traficantes, que la utilizan tan sólo en vistas a las compras y a las ventas".

Esta matemática aplicada, sin embargo, fue esencial en la Nueva Ciencia de Galileo y en todos los desarrollos de la misma durante los siglos XVIII y XIX, resultado fundamental para toda la ciencia y tecnologías modernas.
Ninguno de los dos extremos es bueno para una formación equilibrada entre pensamiento y acción, o entre el saber culto y el saber práctico. Una buena enseñanza debe balancear adecuadamente las dos formas de la matemática, pura y aplicada, para no perderse en puros virtuosismos o en un montón informe de recetas prácticas"
Y termina la presentación de dicho libro afirmando que: "Un importante desafío de la educación matemática actual consiste en lograr el traspaso de muchos conocimientos de un determinado nivel a niveles más bajos y aún incluir en los contenidos novedades que se vayan creando en el campo de la matemática, por ejemplo ciertas posibilidades derivadas del uso de computadoras, como pueden ser algunas ideas sobre fractales y sistemas dinámicos caóticos".

[1] Ver como referencia el artículo *'La didàctica de la matemàtica en l'obra de Lluís Santaló', À. Alsina, J. Callís, T. Calabuig, Homenatge al professor Lluís Santaló i Sors, Unive rsitat de Girona, 200*

En 1986, la Editorial Docencia de Buenos Aires, edita su libro "La enseñanza de la matemática en la escuela media ". Es una verdadera joya que perfectamente puede motivar un buen debate hoy en día, 20 años después. Las referencias que a continuación extraemos del libro, un tanto aleatoriamente, no eximen de su lectura, ya que por el contrario deseamos que inciten a la misma.

En la página 11 Santaló afirma que "los cambios rápidos e incesantes del mundo de hoy hacen que también cambien a su compás los conocimientos necesarios de matemática. (...) Hay que estar preparado para sustituir en los programas muchos tópicos obsoletos por otros nuevos".

¡Qué actualidad posee este párrafo! El siglo XX ha generado nuevos conocimientos matemáticos, ha modernizado y revalorizado otros, ha dejado en la historia de las matemáticas tópicos y recursos por obsoletos. ¡Qué difícil resulta cambiar y renovar!

En la página 14 nos dice Santaló "creemos que la idea intuitiva de número real que tienen todos los alumnos desde la escuela primaria es suficiente para toda la matemática del nivel secundario". "(...) es mucho lo que se puede enseñar a nuestros alumnos de la escuela media sin que "sientan" la necesidad de las engorrosas definiciones de dichos números (...) las cuáles pueden dejarse para el nivel terciario y para aquellos alumnos que hayan elegido, por vocación, los estudios matemáticos". (...) "Los fundamentos de la matemática son siempre muy posteriores a la matemática misma y es un poco inexplicable la inversión que de esta ley se ha querido hacer en la enseñanza".

¡Cuánta reflexión motivan estas citas si meditamos respecto a los programas de Matemática de Enseñanza Media!

De la lectura del libro se desprende que el autor se refiere por "nivel secundario" al ciclo básico del nivel medio, para el cual en el capítulo "CONTENIDOS DEL CICLO BÁSICO" realiza una presentación de contenidos y de tipo de actividades y abordajes, ilustrada por numerosos ejemplos.

En el capítulo "EL CICLO SUPERIOR" sugiere los contenidos y enfoques en Aritmética, Geometría y Probabilidad y Estadística para el nivel, señalando que "el nombre genérico de Matemática incluirá a las tres disciplinas, que si bien nunca es demasiado bueno separar en compartimentos estancos (...) en el ciclo superior tendría ya muy poco sentido. Incluso hay que dar amplia libertad al profesor para que ordene los contenidos a su gusto, conservando siempre la máxima vinculación entre los distintos tópicos, pues la unidad de la Matemática es una de las cosas que deben quedar de manera permanente en la base formativa del alumno".

Esta concepción expuesta por el Dr. Santaló es muy oportuna en la reflexión de los cambios que inexorablemente las demandas actuales de la sociedad imponen al diseño y programas de Matemática en la Educación Media Superior.

Hemos presentado de un modo muy apretado una semblanza del Dr. Santaló, privilegiando algunas de sus preocupaciones en torno a la enseñanza de la matemática, la formación de los jóvenes y la necesaria atención a los cambios que la sociedad requiere.

Deseamos resaltar, en esta instancia, la dimensión del Matemático Profesional que dedicó una parte muy importante de su vida a los problemas de la enseñanza de la Matemática. Su accionar marcó la imperiosa necesidad de la colaboración de los maestros, profesores y matemáticos profesionales, cada cual aportando lo suyo para apuntar al mejoramiento de la enseñanza de la Matemática, en la escuela, en el nivel medio y en la formación de maestros y profesores.

Presentación de los trabajos de la Dra. Ma. del Carmen Chamorro y el Dr. Omar Gil

El Programa para el Mejoramiento de la Enseñanza de la Matemática se ha constituido como un espacio de análisis, discusión y reflexión con la intención de producir nuevos conocimientos que le proporcionan un marco para la generación de líneas de acción.

En un clima de valoración y respeto profesional se da lugar al cuestionamiento, a la discrepancia fundamentada como forma de avanzar.

Es en este ámbito en que se genera un intercambio de miradas y de opiniones entre la Dra. María del Carmen Chamorro (Unidad Complutense de Madrid) y el Dr. Omar Gil (Universidad de la República. Uruguay).

La Dra. Chamorro, con quien hemos venido intercambiando ideas desde el año 2001, nos aportó generosamente el artículo "¿Qué Didáctica de la Matemática necesita la sociedad del siglo XXI?"
A partir de la lectura y discusión de este material el Dr. Omar Gil, integrante del Programa para el Mejoramiento de la Enseñanza de la Matemática, elabora una serie de reflexiones que se le hace llegar a la Dra. Chamorro. Esta analiza el material elaborado por el Dr. Gil y realiza algunas aclaraciones integrando nuevos aportes.

Este "diálogo" mantenido entre estos profesionales vinculados a la Matemática desde diferentes lugares es un claro ejemplo del intercambio intelectual necesario para el avance de cualquier disciplina.

¿QUÉ DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS NECESITA LA SOCIEDAD DEL SIGLO XXI?[1]

Dra. María del Carmen Chamorro
Dpto. de Didáctica de las Matemáticas de la UCM

1.Introducción

Aunque el Diccionario de la Real Academia de la Lengua Española en su edición de 1992 sigue manteniendo la definición de matemáticas como "ciencia que trata de la cantidad"[2], la naturaleza y realidad actual de las llamadas ciencias exactas es muy otra, hasta el extremo que, de admitir esta definición, el retroceso desde el punto de vista didáctico nos situaría en el siglo XIX.

Muy lejos de esa concepción hay un consenso generalizado en torno a cuáles deben ser las finalidades en la enseñanza de las Matemáticas, y que podrían resumirse en tres:
- la transmisión del patrimonio científico,
- la formación de competencias útiles en una gran variedad de profesiones, y
- la contribución a la formación del espíritu.

El desarrollo de las Matemáticas ha sido vertiginoso en el siglo pasado, y así la casi totalidad de las matemáticas superiores que se enseñan en la Universidad proceden de los desarrollos y resultados demostrados durante los últimos cien años. De manera similar la Didáctica de las Matemáticas empieza a fraguarse como ciencia con paradigmas y métodos propios, separándose de forma irreversible de la Pedagogía y la Didáctica General, en los años sesenta.

Entre los factores decisivos que han contribuido al desarrollo de la Didáctica de las Matemáticas están, entre otros, los siguientes:
- el avance en las teorías del conocimiento aplicadas a las Matemáticas, con las aportaciones de Piaget, Vigotsky, Duval y Vergnaud.
- la necesidad de indagar sobre las causas del rechazo de una parte de la sociedad hacia las matemáticas, así como sobre las causas del fracaso escolar en su aprendizaje y las posibles vías de solución.
- el desarrollo tecnológico, que requiere una sociedad mejor formada, en la que las matemáticas resultan esenciales y de una gran utilidad.
- la necesidad de encontrar el lugar que corresponde a las matemáticas dentro de la cultura, ayudando a su transmisión en tanto que patrimonio de la humanidad.
- el deseo de contribuir a una sociedad más democrática e igualitaria en la que todos tengan acceso a una verdadera educación matemática que vaya más allá del aprendizaje y dominio de las cuatro reglas.
- la búsqueda de respuesta a las preguntas: por qué, para qué y cómo enseñar matemáticas hoy.

[1] Ponencia presentada en el Congreso Internacional "Pedagogía y Educación en el siglo XXI", celebrado en Madrid los días 22, 23, 24 y 25 de marzo de 2004 en la Facultad de Educación de la Universidad Complutense de Madrid.
[2] Real Academia Española: Diccionario de la Lengua Española, Madrid, 1992, p. 945.

2.Factores determinantes para el cambio

Matemáticos profesionales de gran prestigio como William Thurston han comenzado a darse cuenta de lo importante que es para el desarrollo de las matemáticas, y por tanto de las Ciencias y de la Tecnología en general, prestar atención a la enseñanza de las Matemáticas.

Dice Thurston:
"Nosotros los matemáticos deberíamos hacer esfuerzos muchos más importantes para comunicar las ideas matemáticas. Para ello deberíamos, sobre todo, conceder más atención a la comunicación de nuestros esquemas mentales y nuestra manera de pensar, y no solo a nuestras definiciones, teoremas y demostraciones"[3].

Más adelante, en el mismo texto, expresa un giro copernicano en relación con la actitud que hasta ahora habían venido manteniendo los matemáticos en relación con la Didáctica de las Matemáticas, cuando dice:

"He consagrado numerosos esfuerzos a actividades que no producen prestigio, pero a las que yo atribuyo el mismo valor que demostrar teoremas: política matemática, trascripción de mis notas en un libro comunicable para el alumno estándar, uso de la Informática en las Matemáticas, educación matemática, desarrollo de nuevas formas de comunicación en matemáticas…"[4].

Por eso, entre otras razones, cabe esperar que sean **matemáticos puros** los que den un gran impulso a la Didáctica de las Matemáticas en el siglo XXI, reconociendo en el papel del profesor, que elige, reorganiza y transforma los conocimientos, un trabajo de carácter no solo de naturaleza didáctica sino también matemática.

La propia **evolución de las matemáticas** marcará también, al determinar qué matemáticas necesita un ciudadano del siglo XXI, qué partes de éstas deben ser enseñadas. Aparecerán nuevos contenidos a enseñar (fractales, lógica difusa, conjuntos borrosos, análisis no estándar, etc.) y otros dejarán de ser enseñados por su poco interés (algoritmo de la raíz cuadrada, regla de tres, etc.).

El lugar que ocupen las **matemáticas en la cultura** será un factor determinante de cambio, y es aquí donde didactas y matemáticos profesionales deberán hacer un gran esfuerzo en dos sentidos:

- El método que tienen los matemáticos para comunicar sus ideas dista mucho de ser comprensible, incluso para otros matemáticos que no son expertos en la materia comunicada, lo que tiene mucho que ver con el lenguaje utilizado (símbolos, definiciones, cálculos, diagramas, dibujos, etc.). "La transferencia de la comprensión de una persona a otra no es automática. Es algo difícil y complicado.
  En consecuencia, para analizar la comprensión humana de las matemáticas, es importante precisar quién comprende, el qué y cuándo"[5].

- "Para difundir un descubrimiento matemático se necesita un trabajo de reconstrucción con el estilo de pensamiento propio de la comunidad matemática. (...) Este trabajo es de naturaleza didáctica"[6].

Las prácticas matemáticas presentes en la sociedad no están representadas en la cultura. Las matemáticas tienen poco eco en la cultura.
Para muchas personas, el único encuentro con las matemáticas se produce en la escuela. Y es a partir de esta única experiencia social como la gente se forma una opinión de las matemáticas.

Compartimos la idea de Vergnaud[7], de que el período de la educación del niño que va desde los primeros años de la Escuela Infantil, hasta el final de la ESO es absolutamente decisivo para los aprendizajes matemáticos fundamentales, así como para la formación de actitudes positivas o negativas hacia las Matemáticas. Desear que los ciudadanos tengan una cultura general matemática supone,

[3] Thurston (1994).
[4] Op. cit.
[5] Op. cit.
[6] Brousseau (1998).

en primer lugar, aceptar la consideración de que la transmisión de la herencia científica comienza en la Escuela Primaria y en la Enseñanza Secundaria Obligatoria, y no pensar que es tan solo un asunto del Bachillerato y la Universidad.

"Los enseñantes (y los padres) subestiman a menudo las dificultades conceptuales que encuentran los jóvenes alumnos, pues no llegan a cuestionarse la transparencia de sus propias adquisiciones, ni a representarse el camino que los alumnos tienen que recorrer. (...) Subestiman también el tiempo de los aprendizajes que, como en el caso de las matemáticas, reposan sobre la conceptualización de sistemas complejos de relaciones, así como la gran desigualdad de competencias entre alumnos de la misma edad"[8].

Una **sociedad democrática**, si de verdad lo es, no puede permitirse el lujo de poner el conocimiento matemático, patrimonio de la humanidad, al alcance de solo unos pocos. Por otra parte, las Matemáticas son una de las pocas disciplinas en las que la fuerza de la razón es más fuerte que cualquier argumento basado en la autoridad, y permite a los ciudadanos un mejor ejercicio de la libertad. Una buena educación matemática, que no es otra cosa que el aprendizaje de la razón, es una apuesta por una sociedad más libre y más reflexiva.

En esta contribución democrática, la Didáctica de las Matemáticas debe hacer un análisis sistemático de la parte de las Matemáticas que usan las distintas profesiones: agricultores, cocineros, albañiles, mecánicos, electricistas, contables, diseñadores, etc., y preguntarse qué formación debe recibir cada uno de ellos, ¿qué parte debe introducirse en la enseñanza obligatoria?

El gran **desarrollo de la informática** ha permitido la incorporación al currículum obligatorio de aspectos matemáticos que en otros momentos se reservaban para la enseñanza superior. Por ejemplo el uso de las calculadoras para el tratamiento del cálculo simbólico, que permite factorizar, derivar, integrar, encontrar desarrollos en serie, dibujar gráficas, etc.

El uso generalizado de ordenadores permite todo tipo de simulaciones, proporcionando además posibilidades de visualización y animaciones imposibles de realizar con papel y lápiz. Los programas educativos son cada vez más abundantes y están mejor construidos didácticamente hablando, están más al alcance de la escuela. Lo anterior plantea nuevas cuestiones que deben ser abordadas por los didactas:

- ¿Qué conocimientos de informática debe tener un profesor?
- ¿De qué manera la evolución, cada vez más rápida, de la informática determinará la evolución de los programas?
- ¿Qué filtros debe imponer la didáctica a los muchos productos, supuestamente educativos, que constantemente salen al mercado?
- ¿Qué formación deben recibir los profesores para que sean capaces de integrar la informática en sus clases?

La necesidad creciente de **Matemáticas en otras disciplinas** es una evidencia, y su papel se ve constantemente reforzado por las numerosas y a veces imprevisibles implicaciones de conceptos aparentemente muy alejados. Así, los números primos son usados en Cristalografía, las series de Fourier en Astrofísica y Genómica, la Teoría de Números en Criptografía, la Teoría de Probabilidades en la actividad financiera, los métodos estadísticos en Economía y Ciencias Sociales, la Geometría en Urbanismo, la reconstrucción de imágenes en tres dimensiones en Medicina, el Cálculo en transmisión y síntesis de imágenes, etc.

El reto para la Didáctica de las Matemáticas consistirá en encontrar medios adecuados para acercar esta realidad a los ciudadanos, y poner ciencia donde en apariencia hay magia.

[7] Vergnaud (2004).
[8] Vergnaud (en prensa).

En los niveles de la Educación Primaria y Secundaria, encontrar situaciones didácticas apropiadas, que permitan contextualizar los saberes sabios, tiene una gran importancia, por lo que la recomendación de trabajar en simultáneo las Matemáticas y sus aplicaciones irá en aumento.

Los resultados de investigación procedentes de la Didáctica de las Matemáticas empiezan a cambiar muchas de las concepciones ingenuas que sobre la enseñanza de las Matemáticas circulan, incluso en los medios profesionales, por eso, creemos de interés hacer una breve síntesis de lo que es y será la Didáctica de las Matemáticas en el siglo XXI.

3. ¿Qué es y qué será la Didáctica de las Matemáticas del siglo XXI?

Para entender qué es la Didáctica de las Matemáticas hay que partir de sus hipótesis fundamentales:

> H1: La didáctica no es independiente del contenido matemático, es **específica** de cada conocimiento.

Lo que lleva directamente a la segunda de las hipótesis:

> H2: **No** se pueden **separar** las Matemáticas de la Didáctica de las Matemáticas.

Esta segunda hipótesis supone la necesidad de imponer un enorme rigor y ejercer la vigilancia epistemológica sobre todos los resultados que se producen, de forma que en ningún caso el saber matemático quede desvirtuado.

Tales puntos de partida han hecho que la Didáctica de las Matemáticas divergiera cada vez más de los planteamientos de la Didáctica General y de otras didácticas específicas, a las que, sin embargo, ha suministrado conceptos teóricos que se han mostrado útiles, tales como la transposición didáctica, la noción de campo conceptual o de variable didáctica, por poner un ejemplo.

3.1. ¿A qué problemas pretende dar respuesta la Didáctica de las Matemáticas?

Dice Chevallard:

"Observar el saber, localizar los objetos y las interrelaciones entre objetos que lo constituyen, estudiar las leyes de estos complejos de objetos, constituye, en mi opinión, uno de los desarrollos más importantes de los últimos años. Se descubre así el secreto de Polichinela: el saber hace sistema. Lo que no es evidente ni transparente para nosotros. En resumen, existe toda una ecología didáctica del saber, denso dominio de estudio apenas comenzado"[9].

Pueden enumerarse algunos de estos objetos parcial o totalmente identificados:

Con carácter general:

- ¿Se deben y se pueden enseñar ciertos aspectos de la matemática de hoy a los niños y a los jóvenes?
- ¿Con qué objetivo?, ¿bajo qué formas?, ¿con qué precauciones?
  De manera más específica:
- ¿Cómo se organizan los conocimientos antiguos y los nuevos? ¿Qué papel juega en ello la enseñanza? (problemas de detransposición e institucionalización)
- ¿Hay conocimientos que son un obstáculo para otros aprendizajes posteriores? ¿Hay técnicas didácticas que evitan mejor los obstáculos? (obstáculos epistemológicos y didácticos).
- ¿Cómo influyen las concepciones didácticas y epistemológicas de los profesores?
- ¿Cómo se reorganiza el saber? (Por ej. paso de la aritmética al álgebra, de los naturales a los decimales, de la exactitud a la aproximación, etc.).

- ¿Cómo regular y vigilar las distorsiones que se hacen del saber sabio en la transposición didáctica? (vigilancia epistemológica).

Para responder a las preguntas anteriores hace falta admitir una cierta reorganización didáctica, razón por la cual es necesario disponer de teorías didácticas sólidas. Las Matemáticas por si solas nunca podrían responder satisfactoriamente.

Sin embargo, la Didáctica de las Matemáticas va más allá de los planteamientos anteriores, pues, como dice Brousseau:

"Fundamentalmente la Didáctica no se ocupa de proponer normas pedagógicas y objetivos educativos, sin embargo, puede suceder que sus resultados den a esos proyectos preciosas indicaciones". Y continúa diciendo: "La Didáctica tiene por objeto principal comprender los fenómenos ligados a la difusión de los saberes matemáticos pero produce resultados y aplicaciones útiles para una ingeniería, es decir, la producción de medios o de proyectos didácticos"[10].

Por tanto, y esto es importante, los métodos empleados en Didáctica de la Matemáticas, aunque difieran de los métodos clásicos de trabajo estadístico con muestras o análisis clínicos, tienen un enorme rigor, y los resultados, de los que más adelante hablaremos, van más allá de los casos particulares o de las propuestas ingeniosas para enseñar uno u otro tema.

3.2. ¿Qué resultados produce la Didáctica de las Matemáticas?

Un resultado es una respuesta dada por una institución a una cuestión planteada explícitamente por otra institución que tiene la responsabilidad de usarlo e interpretarlo. Viene limitado por su validez, así como por su uso. (Brousseau)

Los resultados de investigación en Didáctica de las Matemáticas son bien distintos de los que se obtienen en Matemáticas[11]:

- en didáctica un resultado se apoya sobre argumentos empíricos.
- un resultado puede consistir en localizar, delimitar o definir un fenómeno didáctico.
- se requiere poder delimitar y controlar las condiciones de aparición de los fenómenos didácticos.

Así como

- controlar las condiciones de evolución: predicción, reproducción y estabilidad en contextos similares. La definición de contexto depende del marco teórico.

Por ello, algunos de los resultados que la Didáctica de las Matemáticas produce son:

- Descripciones de fenómenos de enseñanza, así como explicación de algunos de estos fenómenos, con ayuda de ciertos conceptos específicos, variables o leyes.
- Medios científicos que permiten integrar, coordinar y adaptar resultados y conocimientos procedentes de otros dominios, tales como la psicología, la sociología, etc.

Evidentemente, aunque la Didáctica de las Matemáticas no solo se centre en la enseñanza, aporta técnicas para ella, en particular:

- Técnicas específicas de enseñanza de carácter global, relativas al currículum, contenido de los programas, orden de los temas, organización general de los conocimientos, etc. Lo que habitualmente se denomina **macrodidáctica.**
- Técnicas locales de preparación de lecciones, diseño de objetivos, material específico, evaluación, etc.
- Ingenierías didácticas, construidas sobre principios epistemológicos rigurosos, que proporcionan sugerencias, avaladas por conocimientos científicos actuales y

[9] Chevellard (1994).
[10] Brousseau (1994b).
[11] Johsua (1992).

resultados de la teoría didáctica, al sistema educativo, y al profesor en particular, sobre la mejor manera de difundir los conocimientos matemáticos. Lo que se denomina **microdidáctica.**
- Génesis artificiales de reconstrucción de un saber matemático, basadas en la elección de condiciones que permitan hacer desarrollar los conocimientos matemáticos del alumno.
- Resultados sobre la obsolescencia y reproductibilidad de situaciones didácticas.
- Técnicas específicas para alumnos con dificultades (discalculias, problemas de razonamiento, deficiencias auditivas o visuales, etc.)

El desarrollo de cualquier área de conocimiento se encuentra íntimamente ligado a su capacidad para desarrollar teorías potentes capaces de modelizar los hechos y fenómenos que pueden ser explicados, previstos y controlados, en el marco de dicha teoría. Ésta es una de las razones que han hecho que la Didáctica de las Matemáticas se encuentre en un nivel de desarrollo mayor que otras didácticas, al disponer de varias teorías sólidas y complementarias.

Desde el primer momento, los principales investigadores, considerados como padres de la moderna Didáctica de las Matemáticas (Brousseau, Chevallard, Vergnaud, Douady, Artigue, Duval, etc.) se dieron cuenta de la necesidad de acuñar un vocabulario específico que permitiese, sin riesgo de malentendidos, una comunicación fluida, y desarrollaron teorías, conceptos, definiciones y terminología, así como herramientas conceptuales con las que abordar las cuestiones de naturaleza didáctica. Aun así, evitar la confusión entre el significado que los términos tienen en la teoría y su significación fuera del medio profesional de los didactas (enseñanza, sociedad, etc.) es más complejo de lo que pudiera parecer.

Entre las teorías que han sido y siguen siendo claves para el desarrollo de la moderna didáctica están:

- Teoría de Situaciones Didácticas (variable didáctica, obstáculos, situación a-didáctica, contrato didáctico) (G. Brousseau).

- Teoría antropológica (transposición, topogénesis y cronogénesis, relación al saber, praxeologías) (Y. Chevallard).

- Teoría de los Campos Conceptuales (campo conceptual, noción de concepto, invariantes operatorios, competencias) (G. Vergnaud).

- Teoría útil-objeto (cambio de marcos) (R. Douady).

- Teoría de los registros semióticos (semiosis y noesis, cambio de registros) (R. Duval).

La difusión entre los didactas de estas teorías ha permitido obtener resultados importantes en distintos dominios.

Se ha prestado gran atención a la mejora de las técnicas de trabajo en la clase, a través de la explicación y previsión del comportamiento de los alumnos, al acuñarse las nociones de concepción y obstáculo, de enorme interés en la enseñanza, no solo de las Matemáticas sino también de las Ciencias. Se han analizado los fenómenos de contrato didáctico que durante mucho tiempo han permanecido ocultos enmascarando el origen de ciertos comportamientos, y se han tipificado los efectos del contrato (efectos Jourdain, Topaze, deslizamiento metacognitivo, etc.). Todo ello sin descuidar aspectos clásicos como el desarrollo de materiales específicos, como la creación de programas informáticos educativos (Cabri, Cinderella, Derive, etc.), lo que a su vez ha dado lugar a desarrollos teóricos nuevos: transposición informática, micromundos, etc.

Una característica fundamental de la moderna Didáctica de las Matemáticas es su enfoque sistémico, que impone la necesidad de no estudiar los hechos didácticos de una manera aislada, y tomar por tanto en consideración todos los subsistemas y polos que forman parte del sistema didáctico, estudiando las distintas interacciones que se producen en el seno de dichos subsistemas.

4. La utilidad social de la Didáctica de las Matemáticas

Nada mejor para expresar la utilidad y necesidad de la Didáctica de las Matemáticas en nuestro siglo que reproducir las palabras del Ministro de Educación francés, Claude Allègre, en la carta que dirige a las distintas asociaciones de didactas y profesores de Matemáticas, en la que les encarga llevar a cabo una reflexión global sobre la enseñanza de las Matemáticas encaminada a hacer propuestas relativas a la evolución de los contenidos matemáticos a enseñar de la Escuela Elemental a la Universidad: "El primer objetivo de esta reflexión es permitir a la enseñanza de las matemáticas acompañar y preparar la evolución y el desarrollo de las ciencias y técnicas en todos los dominios, y proporcionar a los alumnos los medios para adaptarse y controlar dicho desarrollo. (…)La formación inicial de los profesores deberá evolucionar, de manera progresiva, pero anticipada, en relación con los cambios de contenido"[12] .

Así, la Didáctica de las Matemáticas:

- Proporciona elementos de gestión a los poderes públicos, o privados, para gestionar la enseñanza con medios apropiados.
- Mejora las condiciones de enseñanza para todos los ciudadanos, buscando una enseñanza de las Matemáticas más satisfactoria.
- Ayuda a cambiar la relación de la sociedad con las Matemáticas.
- Actúa sobre los conocimientos de los padres y otros profesionales (noosfera).
- Muestra objetos didácticamente invisibles:
    - espacio/geometría
    - organización material del conteo
    - pensamiento natural/lógica formal
    - uso e interpretación de la graduación

lo que nos parece inestimable en una sociedad en la que Ciencia y Tecnología han ido ocupando progresivamente más parcelas de nuestra vida.

5. Recomendaciones para el futuro inmediato

Retomando las conclusiones de la Comisión Kahane[13] a la que nos hemos referido anteriormente, en la que han participado los matemáticos y didactas más eminentes de Francia, nación que cuenta con varias medallas Field, equivalente al Premio Nobel de Matemáticas, y que tiene una gran tradición didáctica, se pueden esbozar las recomendaciones más importantes en relación con la enseñanza de las Matemáticas en nuestro siglo. Con carácter general:

- Dotarse de medios materiales y estructurales para llevar a cabo una reflexión permanente sobre la enseñanza de las Matemáticas. Prestando atención a la formación permanente de los profesores, produciendo documentos para su formación.

- Integrar una parte de informática en la formación de profesores de Matemáticas.

- Crear, en todos los institutos y escuelas, laboratorios de Matemáticas que cuenten con abundante material y documentación, que puedan servir como clubes matemáticos y lugar de encuentro entre investigadores, profesores y alumnos.

- Enseñar a los alumnos a conjeturar un resultado, construir una argumentación, dar forma a una solución y controlar los resultados obtenidos, evaluando su pertinencia en función del problema estudiado.

- Evitar la obsolescencia de los contenidos a enseñar, y controlar el lugar que ocupan ciertos conceptos en relación con su importancia matemática real.
- Utilizar las nuevas tecnologías, velando siempre por el carácter didáctico de los programas utilizados. El aprendizaje no se produce por el mero hecho de instalar a un alumno delante de un programa de ordenador.

[12] Kahane (2002).

En relación con la enseñanza de las distintas disciplinas que integran las Matemáticas:

•Geometría

- en la enseñanza elemental el objetivo prioritario es el conocimiento familiar del espacio, con la doble función de permitir al alumno el dominio y control de su entorno, y servir de punto de apoyo para el aprendizaje de la geometría,

- desarrollar la geometría del espacio, enseñando a los alumnos a ver en el espacio, sirviéndose de distintos materiales: poliedros, polidrones, programas informáticos, dibujos (perspectivas, patrones, proyecciones, secciones),

- reforzar el papel de los invariantes (longitud, ángulos, área),

- insistir en los problemas de construcciones y lugares geométricos,

- relacionar la Geometría con las otras disciplinas (Cinemática, Mecánica, Artes Plásticas, Geografía, etc.), y con las múltiples circunstancias de la vida en las que resulta de utilidad (orientación, lectura de mapas, bricolaje, desplazamiento de objetos, interpretación de diagramas estadísticos, etc.).

•Estadística y Probabilidad

- mejorar la formación de los ciudadanos para que puedan comprender el modo de pensar estadístico, y efectuar reformas en la enseñanza de las Matemáticas en los niveles de Enseñanza Primaria y Secundaria. El tratamiento elemental de la información reposa sobre la manipulación y la comparación de números, ya se trate de porcentajes, índices o proporciones,
- iniciar su enseñanza en Secundaria, enriqueciendo el vocabulario de los alumnos con el uso el lenguaje gráfico, localizando cuestiones de naturaleza estadística. Utilizar los juegos de azar, los fenómenos biológicos, las coincidencias, el tiempo meteorológico, el riesgo, etc., para aproximar a los alumnos al modo de pensar aleatorio y a la probabilidad de un suceso aleatorio.

La experiencia ha demostrado que trabajar el dominio aleatorio después del Bachillerato, sin que se haya hecho una primera aproximación en la Educación Secundaria, es muy difícil.

- proporcionar a los profesores una formación no solo teórica, enfrentándoles con el tratamiento de datos reales.

•Informática

- dar respuesta al impacto que la Informática ha tenido sobre las Matemáticas, haciendo evolucionar sus programas, incluyendo nuevos objetos de enseñanza: programación, algoritmos,
- recomendación para usar, de manera integrada en la clase, calculadoras programables y programas educativos informáticos,
- mejorar la formación matemática inicial de los profesores. Es necesario que el profesor domine lo que debe enseñar, pero que, además, sepa el por qué y el cómo aprenden sus alumnos.

•Cálculo

- reforzar a lo largo de toda la escolaridad las relaciones entre razonamiento y cálculo.
- desarrollar el cálculo instrumental de manera inteligente y controlada. La enseñanza debe garantizar las competencias de cálculo simple, oral o escrito, pero también, el dominio inteligente del cálculo que se hace con calculadoras y programas informáticos.
- equilibrar la relación entre cálculo exacto y cálculo aproximado.
- diversificar las modalidades de cálculo, escogiendo para cada tipo de formación las formas de cálculo que más enriquezcan la cultura de los alumnos, interactuando con las otras disciplinas y respondiendo a las necesidades de formación profesional.

[13] Op. cit.

- enriquecer los contextos matemáticos del cálculo, reforzando la relación con otras disciplinas.
- prever los equipamientos necesarios. En el futuro, el cálculo será un cálculo tecnológicamente asistido.

6. Para concluir

Aunque lo habitual es comenzar dando siempre las definiciones al principio, creemos que es ahora cuando estamos en condiciones de comprender en profundidad qué es la moderna Didáctica de las Matemáticas.

"La Didáctica de las Matemáticas ha sido la primera, entre las ciencias, fundada sobre una elección radical: la voluntad, y la afirmación de la posibilidad, de tener una aproximación razonada, sistemática, científica y específica de los fenómenos de enseñanza de su dominio, tratando de delimitar teórica y prácticamente, los dominios de lo posible y de lo inaccesible"[14].

"La Didáctica de las Matemáticas es el saber que permite identificar, reconocer, validar y gestionar públicamente los conocimientos puestos en marcha en la difusión de los saberes matemáticos. Estos procesos de difusión no pueden reducirse a la disciplina ni son concebibles sin ella"[15].

Esperamos haber dado una idea precisa de cómo es y qué podemos esperar de la Didáctica de las Matemáticas en el siglo XXI.

Referencias Bibliográficas

Brousseau, G. (1994a) "Perspectives pour la Didactique des Mathématiques", en Artigue et al. (ed.) *Vingt ans de Didactique des Mathématiques*, Grenoble, La Pensée Sauvage, p. 52.
Brousseau, G. (1994b) "La investigación en Didáctica de las Matemáticas". Conferencia pronunciada en el IMIPAE, Barcelona 7 de febrero.
Brousseau, G. (1998a) "Fondements et méthodes de la didactique", en Brousseau, G. *Théorie des Situations Didactiques*, La Pensée Sauvage, Grenoble, p. 51.
Brousseau, G. (1998b): "Utilité et intérêt de la, didactique pour un professeur de collège", en Brousseau, G. *Théorie des Didactiques*, La Pensée Sauvage, Grenoble, p. 333.
Chamorro, M.C. (coord.) (2003) *Didáctica de las Matemáticas*, Pearson, Madrid.
Chevallard, Y. (1994): "Nouveaux objets, nouveaux problèmes en Didactique des Mathématiques", en Artigue et al. (ed.) *Vingt ans de Didactique des Mathématiques*, Grenoble, La Pensée Sauvage, p. 314.
Johsua, S. (1992): *Qu'est-ce qu'un résultat en didactique des mathématiques, Recherches en Didactique des Mathématiques*, La Pensée Sauvage, Grenoble, pp. 199-219.
Joshua, S. y Dupin (1993) *Introduction à la didactique des sciences et des mathématiques*, Paris, PUF.
Kahane, J.P. (dir) (2002) *L'enseignement des sciences mathématiques. Commission de réflexion sur l'enseignement de mathématiques*, CNDP-Odile Jacob, París, p. 278.
Thurston, W. (1994) "On proof and progress in mathematics", en *Bulletin of the American Mathematical Society*, 30, (2), pp. 161-177.
Vergnaud, G. (2004) "Matemáticas. ¿Qué sentido dar a la idea de una cultura general en Matemáticas?", en Chamorro, M.C. (ed) *Los lenguajes de las Ciencias*, Madrid, MECD.

[14] Johsua y Dupin (1993).
[15] Brousseau (1994b).

ALGUNAS REFLEXIONES

MOTIVADAS POR LA LECTURA DEL ARTÍCULO "¿QUÉ DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS NECESITA LA SOCIEDAD DEL SIGLO XXI?", DE MARÍA DEL CARMEN CHAMORRO

Dr. Omar Gil
omargil@fing.edu.uy
Instituto de Matemática y Estadística
"Prof. Ing. Rafael Lagurdia"
Facultad de Ingeniería
Universidad de la República

En estas notas pretendo compartir con el lector algunas reflexiones motivadas por la lectura del artículo "¿Qué didáctica de las matemáticas necesita la sociedad del siglo XXI?", de María del Carmen Chamorro [Ch]. Una tarea que encaro con gusto, a pedido del equipo responsable del Curso de Perfeccionamiento para docentes de Matemática I y II y de Didáctica/Taller de Matemática de los Institutos de Formación Docente e Institutos Normales y con la esperanza de contribuir con las opiniones que aquí se expresan a un debate que sirva a la construcción de un mejor sistema educativo.

Se trata de un ejercicio más o menos libre en el que se desarrollan algunas cuestiones relativas a la Matemática y su enseñanza, sin especial afán de apoyar los puntos de vista expresados en [Ch] ni de polemizar con ellos. Aunque ambas cosas ocurren en algunos pasajes del texto, en otros las ideas siguen derroteros que poco tienen que ver con el contenido de ese artículo.

1. Matemáticos puros, aplicados y otros bichos

Comienzo por comentar que llamó mi atención la frase "cabe esperar que sean ***matemáticos puros***[1] los que den gran impulso a la Didáctica de las Matemáticas en el siglo XXI" [Ch].

Entiendo que al referirse a los matemáticos puros, la autora alude a los científicos cuya tarea es la investigación en la frontera del conocimiento matemático, en oposición a los profesionales de la enseñanza de la Matemática. La expresión "matemáticos puros" está usada entonces con un significado distinto al habitualmente cuando se empleado dentro de la comunidad de los llamados matemáticos puros, que se refieren a sí mismos lisa y llanamente como "matemáticos". Seguiré este último uso en el resto del artículo. Comento entonces que cuando entre los matemáticos, en el sentido que acabo de precisar, se emplea la expresión "matemáticos puros", o "Matemática Pura", se hace para marcar la distinción respecto a los "matemáticos aplicados" o la "Matemática Aplicada".

Tal distinción es en realidad difícil y bastante elusiva, pero en una primera aproximación muy gruesa podríamos decir que mientras la Matemática Pura está esencialmente guiada por el impulso interno de la disciplina, la Matemática Aplicada tiende a buscar la respuesta a preguntas externas a ella. Quizás aclaren un poco el punto las reflexiones del matemático estadounidense John Milnor[2] [Mi]: *"La matemática pura tiende a juzgar cualquier trabajo en la ciencia matemática sobre la base de su profundidad matemática, y hasta dónde introduce nuevas ideas o métodos, o resuelve problemas de*

[1] El énfasis es de la autora de [Ch].

[2] John Milnor nació en 1931 en New Jersey, USA. Ha realizado importantes contribuciones en las áreas de Topología, Geometría y Sistemas Dinámicos. Quizás la más famosa de ellas, que le valiera una medalla Fields en 1962, fue el descubrimiento de que la esfera 7-dimensional admite más de una posible estructura diferencial, algo que puede explicarse diciendo que sobre un mismo objeto (la esfera 7-dimensional en este caso) es posible construir geometrías que no son equivalentes entre sí. Actualmente es profesor de la Universidad de Nueva York en Stony Brook.

larga data (...) Sin embargo, cuando la matemática se aplica a otras ramas del conocimiento humano una cuestión bastante diferente debe ser contestada de antemano: hasta qué punto se incrementa nuestra comprensión del mundo real[3]".

¿Por qué toda esta digresión sobre la Matemática Pura y la Matemática Aplicada? Porque concuerdo con la autora de [Ch] en la importancia de que la comunidad matemática en general se involucre activamente con los problemas de la enseñanza de la Matemática a todos los niveles. Pero me interesa en particular destacar que considero muy importante la participación de los ***matemáticos aplicados***[4] en estas tareas. Y también de científicos y profesionales de otras disciplinas en las que la Matemática tiene un papel relevante (como son físicos, biólogos, ingenieros, etcétera). En los próximos párrafos intentaré justificar este punto de vista.

La Matemática puede ser comprendida, valorada, desarrollada y transmitida sin ningún tipo de afán utilitario en mente. El reto que representa un problema matemático interesante basta por sí solo para encender la imaginación y estimular la actividad intelectual. Hay problemas famosos, como la vieja conjetura de Fermat, hoy Teorema de Fermat-Wiles, a los que les cabe perfectamente esta descripción. Probablemente jamás[6] tenga ninguna consecuencia práctica saber que la igualdad $a^n + b^n = c^n$ es imposible cuando a, b, c y n son números naturales y n es mayor que 2. Pero durante más de tres siglos, desde que Fermat planteó esta cuestión hasta que Wiles[7] la resolvió, la consideración de este problema mereció la atención de numerosos matemáticos[8] y estimuló la investigación en el área de la teoría de números. Sobre este punto recomendamos la lectura de [Si], donde se relata muy amenamente la historia del Teorema de Fermat-Wiles.

Es posible entonces aproximarse a la Matemática desde el placer estético, desde el aprecio por el rigor en el razonamiento, desde lo lúdico. La Matemática tiene mucho de arte, de creación intelectual para el gozo del espíritu humano. Y estas características por sí solas le dan un valor cultural que la hace digna de ser enseñada en las aulas. Muchas veces la belleza de la Matemática no es obvia, pero ningún profesor de Matemática renunciaría a buscarla en su clase.

[3] En el artículo citado Milnor comenta algunos aspectos de la obra de John Nash. Nash recibió el Premio Nobel de Economía en 1994, por sus trabajos en Economía Matemática de fines de la década del 40. Curiosamente, estos trabajos que le valieron el Premio Nobel no son las contribuciones de Nash más apreciadas por sus colegas matemáticos, sino sus aportes en las áreas de Geometría y Análisis. Un ejemplo de los diferentes criterios de valoración a los que Milnor alude.

[4] El énfasis es del autor.

[5] Pierre de Fermat vivió en Francia, entre 1601 y 1665. Abogado de profesión, realizó aportes en diversas ramas de la Matemática y de la Física. Su contribución más famosa es el llamado Último Teorema de Fermat. Un resultado que Fermat anotó en el margen de una traducción de la Aritmética de Diofanto, junto con la referencia a haber encontrado una hermosa demostración que, por razones de espacio, el margen no podía contener. La creencia generalizada hoy en día es que la prueba a la que Fermat alude es errónea. Fermat incluyó en su correspondencia, en fechas posteriores a su célebre anotación marginal, referencias a casos particulares de este teorema, lo que sugiere que él mismo había notado que su presunta prueba general era en realidad incorrecta.

Fermat ideó métodos de trazados de tangentes y cálculo de áreas que son antecedentes directos del cálculo diferencial de Newton y Leibniz, y que le permitían tratar problemas de búsqueda de máximos y mínimos de funciones que en su época eran de gran dificultad. En su correspondencia con Blaise Pascal podemos encontrar el origen de la Teoría de la Probabilidad. También formuló el principio de la Óptica según el cual la luz que viaja entre dos puntos lo hace recorriendo el camino que requiere el menor tiempo posible. Pero su mayor interés estaba centrado en la Teoría de Números, área en la que realizó diversas contribuciones.

[6] Es ésta una afirmación arriesgada. La Teoría de Números está en el corazón de la criptografía moderna, y sus resultados se utilizan para proteger nuestras comunicaciones.

[7] Andrew Wiles nació en Cambridge, Inglaterra, en 1953. A la edad de 10 años descubrió el enunciado del Último Teorema de Fermat en la biblioteca pública de su localidad Wiles cuenta: "desde aquel momento traté de resolverlo, era tal desafío, un problema tan hermoso (...)". Esta temprana revelación marcó el destino profesional de Wiles, que finalmente estudiaría Matemática y obtendría su doctorado en Cambridge en 1980. Durante la realización de su tesis Wiles no trabajó en el Teorema de Fermat, un problema con un gran riesgo de esforzarse durante largos años sin alcanzar ningún fruto. Pero cuando algunos años más tarde quedó establecido el vínculo entre el Último Teorema de Fermat y un problema de curvas algebraicas conocido como la conjetura de Shimura-Taniyama, Wiles decidió concentrarse en probar esta conjetura.

Trabajó exclusivamente en ello durante siete años, y en 1993 anunció una demostración del Teorema de Fermat. Esta prueba era aún defectuosa, pero pudo ser completada en 1994, en colaboración con R. Taylor, y finalmente publicada en 1995. Wiles describe la culminación de su trabajo de la siguiente manera: "súbitamente, en forma totalmente inesperada, tuve esa increible revelación. Fue el momento más importante de mi carrera. Algo que no haré otra vez (...) fue indescriptiblemente hermoso, era tan simple y elegante, que permanecí unos veinte minutos mirándolo incrédulo, luego durante el día caminé alrededor del departamento. Volvía a mi escritorio y estaba aún allí - estaba aún allí".

Como resumen de todo este intenso trabajo Wiles nos dice "(...) ningún otro problema tendrá el mismo significado para mí. Tuve ese raro privilegio de poder perseguir como adulto el sueño de mi niñez. Yo sé que es un raro privilegio, pero sé que si una persona puede hacerlo es lo más satisfactorio que se pueda imaginar".

[8] ¡Y no matemáticos! Las anécdotas de aficionados que se acercaban afirmando haber encontrado una demostración del Último Teorema de Fermat son moneda corriente en los departamentos de Matemática de todo el mundo.

Pero también es posible aproximarse a la Matemática a través de lo que ella es capaz de revelarnos del mundo que nos rodea, o recorriendo los saberes con los que nos permite construir realidades impensables sin la Matemática que está incorporada en mucha de la tecnología de la que hoy disponemos. Entiendo que este último aspecto de la Matemática debe ser explicado a través del sistema educativo, algo que me interesa destacar por razones de fondo y por razones coyunturales.

En primer lugar, la Matemática se ha visto impulsada desde sus orígenes por el deseo de comprender el Universo que nos rodea, y sería prácticamente imposible entender la disciplina y explicar su desarrollo ignorando este fenómeno. Por lo que considero que la conexión de la Matemática con otras disciplinas es uno de sus aspectos esenciales, e ignorar en el aula estas conexiones es equivalente a transmitir una imagen distorsionada de esta ciencia.

La Matemática tiene un enorme valor práctico que incluso los espíritus más insensibles pueden apreciar: permite resolver infinidad de problemas. Estamos inmersos en un mundo lleno de Matemática, que hace posible nuestra vida en la forma en que la conocemos. Muchas veces esto no es obvio, pero mostrarlo es también parte de la tarea del maestro y del profesor de Matemática en el siglo XXI. Probablemente, quien sea capaz de mostrar a sus alumnos la Matemática de su vida cotidiana, la que está implícita en muchas de sus experiencias, haya ganado un buen trecho en despertar la motivación necesaria para aprender más y mejor.

Desentrañar parte del mundo de relaciones entre la Matemática, nuestra visión del universo y la tecnología, y desde allí diseñar actividades adecuadas para el aula, en los distintos niveles de la enseñanza, me parece pues un reto propio de la enseñanza de la Matemática en el siglo XXI, que invita a trabajar juntos a profesionales con competencias muy diversas. Si se alcanza el éxito en esta tarea estaremos brindando a los estudiantes la posibilidad de tener una mayor comprensión de todo el mundo que les rodea, en vez de ofrecerles solo saberes matemáticos muy difíciles de contextualizar, o, lisa y llanamente, cerrados sobre sí mismos. Para ir haciendo boca, recomiendo la lectura y consulta del interesante texto [Co].

Por último, considero que los aspectos de la Matemática que, simplificando y sin afán de exagerar divisiones un tanto irreales, podríamos llamar propios de la Matemática Aplicada están especialmente descuidados en buena parte del sistema educativo uruguayo. Por lo tanto cabe insistir sobre ellos, realizando una suerte de "discriminación positiva", para abogar por una presentación más equilibrada de la Matemática que brinde una descripción de la disciplina más fiel a su historia y al lugar que ocupa en nuestra sociedad.

Hechos estos comentarios acerca del importante papel que, a mi juicio, la cara más práctica de la Matemática debería desempeñar en el aula, quiero alejarme del utilitarismo exagerado que se expresa en la preocupación por desentrañar *cuál es la parte de las Matemáticas que usan las distintas profesiones: agricultores, cocineros, albañiles, mecánicos, electricistas, contables, diseñadores, etcétera* [Ch]. Me parece una aproximación poco esclarecedora. Ironizando de manera algo exagerada diría que es más o menos como preguntarse qué parte de la historia universal debe conocer un carnicero, o cuál es la literatura que usa un médico.

En primer lugar porque parece difícil alcanzar objetivos formativos generales por el agregado de formaciones específicas que requieran las distintas profesiones. Sin perjuicio de que puede ser muy útil mostrar cómo la Matemática ocupa un lugar en profesiones muy diversas, si algún conocimiento específico es requerido por alguna profesión es preferible que se imparta durante la formación para esa profesión, y dedicar el espacio del currículo reservado para la Matemática a aquellos temas que resulten de mayor interés general. La estructura conceptual de la Matemática, de una naturaleza abstracta que muchas veces parece no aludir a ninguna realidad aunque sea capaz de abarcar infinitas posibilidades, brinda un cuerpo de conocimiento potencialmente útiles para las profesiones más diversas, incluso aquellas que hoy ni siquiera existen. Es deseable entonces buscar la comprensión de algunas ideas generales, básicas, que habilite a su aplicación flexible en distintos circunstancias, apuntando a construir un mejor entendimiento del mundo que nos rodea y a abrir las vías para continuar con el aprendizaje en direcciones muy variadas. Estos criterios me parecen más apropiados para aproximarse a los problemas de la educación matemática que la revisión de requisitos matemáticos disciplina por disciplina.

Por otra parte, algunas de las demandas de la educación matemática para la vida moderna son más exigentes que la formación requerida por muchas actividades. Menciono, a título de ejemplo y a cuenta de una consideración cuidadosa de estos problemas, algunas cuestiones que entiendo que deberían ser abordadas durante la educación primaria y/o secundaria: las tasas efectivas anuales de interés; la información que contienen índices como el IPC, el PBI, la esperanza de vida al nacer, etcétera. Y cuál es la información que no contienen; discutir si un impuesto sobre los ingresos que consiste en que a partir de un cierto límite se aplica una deducción porcentual sobre el total de los ingresos es una manera adecuada de implementar una imposición progresiva; analizar las matemáticas implícitas en el sistema electoral vigente, etcétera. Esta corta lista de cuestiones muy concretas da lugar a problemas matemáticos interesantes para el aula.

Una consideración similar vale para el objetivo de brindar una sólida formación cultural. Es necesario dar una buena base matemática para, por ejemplo, mostrar los alcances y limitaciones de la Informática; analizar la sociedad de las comunicaciones; describir algunos de los procesos de toma de decisiones en distintos niveles; realizar el análisis de los algoritmos empleados en la resolución de problemas de muy diversa naturaleza; ilustrar acerca del camino en la búsqueda de la “inteligencia artificial”; etcétera.

Afortunadamente, el tejido del conocimiento científico es suficientemente rico como para ofrecer al diseño curricular alternativas que atiendan simultáneamente los objetivos variados que la educación. Sumémosnos pues a la exhortación de Chamorro de *encontrar medios para acercar esta realidad a los ciudadanos, y poner ciencia donde en apariencia hay magia y a la recomendación de trabajar en simultáneo las Matemáticas y sus aplicaciones* [Ch].

Claro está, no puedo leer esta recomendación más que como una exhortación al trabajo conjunto entre profesores de Matemática, expertos en Didáctica de la Matemática, matemáticos (en sus dos sabores: puros y aplicados) y científicos y profesionales de otras áreas del conocimiento con una interacción relevante con el quehacer matemático.

2. La Matemática y el razonamiento

En un pasaje de [Ch] aparece una alusión *una buena educación matemática*, *que no es otra cosa que el aprendizaje de la razón*. La frase no aparece desarrollada en el texto, pero creo que desmerece otros ingredientes fundamentales del quehacer matemático.

Como es corriente la creencia de que la actividad matemática se reduce al razonamiento puro, que es un reino donde lo más importante es la capacidad de deducir con precisión las consecuencias de las premisas con las que se trabaja, creo conveniente destacar otros elementos que son importantes para el trabajo de los matemáticos y el desarrollo de la Matemática.

Por supuesto, la actividad matemática requiere un buen desarrollo del razonamiento lógico, la capacidad de encadenar una serie de argumentos, y de revisar críticamente argumentaciones propias y ajenas, y sus consecuencias. Pero esta habilidad por sí sola es insuficiente para hacer Matemática. Quizás un ejemplo nos ayude a entender esto: aunque podemos desarrollar toda la geometría euclidiana a partir de los axiomas de Euclides[9], nos quedaríamos sin geometrías no euclidianas si la Matemática se redujera a la habilidad de deducir tesis de las hipótesis. Por cierto, observemos, aunque es bastante obvio, que los postulados de Euclides no existieron por siempre. Estos postulados aparecen en el primer libro de los *Elementos* de Euclides.

Incluso dentro de un sistema de axiomas y conceptos ya dado, es imprescindible guiar a la razón con la intuición que vaya mostrando cuáles son los caminos por donde luego deberá transitar la construcción rigurosa de la teoría o la demostración de un nuevo resultado. Digamos entonces que

[9] Euclides de Alejandría vivió alrededor del año 300 antes de Cristo. Poco se sabe de su vida. Euclides es especialmente conocido por su famoso tratado *Elementos*. El libro es una compilación de conocimiento que se convirtió en el centro de la enseñanza de la Matemática por 2000 años. Probablemente ninguno de los resultados de los Elementos fueran probados por primera vez por Euclides. De hecho, hay evidencia de que se basó en textos anteriores, pero la exposición y organización del material es original.

la imagen de la Matemática como una ciencia hipotético-deductiva, en la que el trabajo de los matemáticos es demostrar teoremas a partir de los axiomas es esencialmente inadecuada, esencialmente incompleta. Como comenta W. Thurston[10] en el artículo [Th], este modelo no explica cuál es la fuente de las preguntas que la Matemática intenta responder. Tampoco aclara cuál es el origen de los axiomas, que más bien aparecen históricamente en el último estado del desarrollo de las teorías, y no en su comienzo.

En realidad la Matemática crea y recrea permanentemente mundos nuevos, y desmiente una y otra vez esa imagen cerrada y acabada que se encierra en la manida frase "la Matemática es la ciencia del 2+2=4". Reformulémosla en la forma "la Matemática es la ciencia del 1+1=0", y ahora dejemos hablar al respecto a R. Hamming[11], en [Ha]: "en un libro [Ha2] que he escrito recientemente los números enteros son utilizados como etiquetas, y los reales usados para representar probabilidades; pero el resto de la aritmética y el álgebra que aparecen en el libro, y hay mucho de ambas, sigue la regla[12] de que 1+1=0.

Distintas matemáticas se desarrollan para adaptarse a distintas situaciones y dar respuesta a distintas preguntas: las matemáticas no siempre funcionan. *Cuando encontramos que los escalares no funcionaban para las fuerzas, inventamos una nueva matemática, vectores. Y yendo más lejos hemos inventado los tensores ... seleccionamos la matemática para adaptarnos a la situación"* [Ha].

Este mundo de posibilidades diversas requiere la capacidad de percibir qué conceptos son fecundos, de anticiparse intuitivamente a los resultados correctos, de imaginar nuevas posibilidades. La Matemática es un dominio donde la intuición, la imaginación, la capacidad de introducir nuevas ideas, de conjeturar, un cierto sentido estético, un gusto por la disciplina, la habilidad para interpretar en clave matemática problemas de otras áreas del conocimiento, son cualidades sumamente importantes. Veamos en la nota 10, por ejemplo, cuáles son las cualidades de la obra de Thurston que sus colegas destacan. Sin ellas la matemática prácticamente no podría avanzar, porque para hacerlo depende de la capacidad de imaginar conceptos nuevos, que no estén esencialmente implícitos en los postulados y las definiciones preexistentes. En un complejo juego entre la razón, la imaginación, la intuición, también la experimentación y la búsqueda tesonera, se ha realizado a lo largo del tiempo la construcción de la disciplina.

3. La Matemática y la Informática

En el artículo [Ch] aparecen referencias más o menos extensas al papel instrumental que la computación puede tener para la enseñanza de la Matemática. Es así que se destaca cómo es posible mostrar conceptos matemáticos y experimentar empleando "software" didáctico adecuado.

[10] William Thurston nació en 1946, en Washington DC, USA. Recibió su doctorado en 1972, en la Universidad de California en Berkeley. En 1982 Thurston recibió una medalla Fields. Transcribimos algunas opiniones de sus colegas acerca de la obra de Thurston:

Wall - *Thurston tiene una fantástica intuición y visión geométrica: sus ideas han revolucionado completamente el estudio de la topología en 2 y 3 dimensiones, y trajo a la luz un nuevo y fructífero juego entre el análisis, la topología y la geometría.*

Lawson - *Es evidente que las constribuciones de Thurston al campo de las foliaciones son de una profundidad considerable. Sin embargo, lo que las destaca es su maravillosa originalidad.*

Sullivan - *Los resultados de Thurston son sorprendentes y hermosos. El método consituye un nuevo nivel de análisis geométrico, en el sentido de una poderosa estimación geométrica por una parte, y visualización espacial e imaginación por la otra, lo que los vuelve realmente destacables.*

[11] Richard Hamming nació en 1915 en Chicago, USA, y falleció en 1998. En 1942 recibió su doctorado en Matemática por la Universidad de Illinois en Urbana-Champaign, por una tesis sobre problemas de ecuaciones diferenciales. Trabajó luego en el tristemente famoso proyecto Manhattan. Al final de la segunda guerra mundial, en 1946, pasó a formar parte del equipo de la compañía Bell, donde coincidió con Claude Shannon, el padre de la teoría de la información que está en los cimientos de toda la tecnología basada en el procesamiento digital de la información.

De esta etapa en la Bell data la contribución más conocida de Hamming: el artículo de 1950 que dio origen a la teoría de los códigos correctores de errores. Estos códigos se emplean para procesar la información de forma tal que un alto porcentaje de los errores que se produzcan en su transmisión o almacenamiento puedan corregirse automáticamente, y están incorporados en objetos de uso corriente como los discos compactos y DVD, y en los protocolos de comunicación de los teléfonos celulares.

[12] Esta regla es adecuada para tratar la información digital, almacenada en forma de series de ceros y unos. Con esta convención se puede definir una aritmética dentro del conjunto {0,1}, formado por los dos símbolos 0 y 1, de la siguiente manera: las sumas y productos entre ceros y unos se definen en la forma habitual, salvo la suma "1+1" que sigue la regla "1+1=0". Esta aritmética permite tratar algebraicamente las series de ceros y unos, y se emplea para el tratamiento de la información digitalizada, el tema que Hamming trata en [Ha2].

Más breves son las referencias a la relación entre la Informática y la Matemática como disciplinas científicas, que se resumen en la recomendación de dar respuesta al impacto que la Informática ha tenido sobre las Matemáticas, haciendo evolucionar sus programas, incluyendo nuevos objetos de enseñanza: programación, algoritmos. Me interesa introducir algunos comentarios en esta dirección.

La Informática y la Matemática son disciplinas que tienen una vinculación muy estrecha. De hecho, podemos fijar el nacimiento de la Informática en los trabajos del matemático inglés Alan Turing[13] que sentaron bases teóricas para la computación antes de que la tecnología hiciera posible las computadoras. En la actualidad no existe una frontera claramente definida entre ambas. Esta relación profunda debería reflejarse en el aula.

Cuestiones propias de la Informática son una riquísima fuente potencial de problemas y actividades adaptadas a los distintos niveles de la enseñanza de la Matemática. Por ejemplo, estudiar por qué funcionan y cómo funcionan, algoritmos de distinta naturaleza en diferentes contextos, ofrece una gran gama de situaciones y niveles de dificultad con los que trabajar, desde comprender el funcionamiento de algunos algoritmos ingenuos que los niños emplean en sus juegos hasta el análisis de procedimientos complejos de optimización y organización de la información que requieren matemáticas de un nivel preuniversitario o universitario[14].

Es así que la educación matemática puede beneficiarse, tal como señalábamos en la sección 1 al destacar las múltiples conexiones de las Matemáticas con otras ciencias, de su vinculación privilegiada con la Informática. En el otro sentido, considero vital para una adecuada presentación de la Informática en el sistema educativo mostrarla desde esta relación profunda que tiene con la Matemática. Sin ella, es muy probable que la Informática se reduzca a la realización de actividades más o menos rutinarias como copiar archivos o redactar documentos con algún editor de texto más o menos sofisticado.

Hay otro aspecto en el que la amplia difusión de las computadoras debería tener un impacto importante sobre la enseñanza de la Matemática: le corresponde a ésta educar acerca del papel que el cálculo científico ocupa en nuestra sociedad. La combinación de la modelización matemática de la realidad, con la teoría y el cálculo numérico correspondientes a los modelos es una herramienta de una enorme potencia con la que cuentan en la actualidad científicos e ingenieros y que incide directamente sobre nuestra comprensión de la realidad y las posibilidades que ofrece nuestra tecnología.

Parece aconsejable entonces buscar para cada nivel del sistema educativo de qué maneras puede mostrarse este núcleo de la actividad científica de nuestra época e incluir en el repertorio de habilidades de cálculo de niños y jóvenes el uso adecuado de herramientas como calculadoras y computadoras. Éstas ofrecen la posibilidad de abordar cálculos de cierta magnitud y complejidad, lo que refuerza la posibilidad de acercar la Matemática a la resolución de problemas de otras disciplinas.

Insistiendo nuevamente en el interés de mostrar una motivación genuina para los problemas matemáticos que se consideren en el aula, digamos que el cálculo científico es una fuente de preguntas interesantes que pueden usarse para generar actividades de diferentes niveles de dificultad. Por ejemplo, desde la comprensión del sistema de numeración que emplea una calculadora o una computadora, hasta elaborados ejercicios de análisis matemático que tengan como objetivo estimar el error cometido por los algoritmos de cálculo[15].

[13] Alan Turing nació en 1912 en Londres, Inglaterra, y falleció en 1954. Fue un estudiante talentoso pero problemático, que buscaba seguir sus propias ideas y crear sus propios métodos en vez de aceptar la rutina escolar.
Hacia 1936 Turing describió un modelo para una computadora antes de que la tecnología hubiera alcanzado el punto de que la propuesta de construir una fuera real. Se trata de lo que actualmenta llamamos una máquina de Turing, una computadora universal *que puede hacer el trabajo de cualquier máquina construida con un propósito especial, esto es, de realizar cualquier cómputo, si una cinta que contenga las "instrucciones" adecuadas es insertada en ella*. Este trabajo, que contiene ideas profundamente originales e influyentes, tuvo algunas dificultades para ser reconocido por los colegas de la época y publicado en los Proceedings of the London Mathematical Society.
Turing trabajó activamente durante la segunda guerra mundial en la decodificación de los códigos secretos alemanes; sobre el final de los años '40 lo hizo en el diseño de computadoras para el National Physics Laboratory y para la Universidad de Manchester; hacia 1950 se ocupó de problemas de inteligencia artificial.

[14] Por supuesto, la consideración de este tipo de problemas se extiende aún mucho más lejos, hasta constituirse en un área de investigación científica activa.

[15] También en este caso los problemas trascienden la Matemática que puede abordarse en cursos de cualquier nivel, y alimentan una activa área de investigación.

4. Algunos comentarios finales

Las ideas matemáticas constituyen un mundo rico y complejo, de aprehensión a veces difícil, y son el fruto de una larga tradición científica. Considero que la preocupación por explicar los principales hitos de su desarrollo debería incluirse explícitamente en la reflexión sobre la didáctica de la Matemática. El texto [Va] contiene una muy agradable descripción de la relación de la Matemática con otras disciplinas, con énfasis en mostrar su desarrollo histórico. Recomendamos su lectura. Muchas de las referencias históricas han sido tomadas del sitio web [MT], que constituye una fuente excelente y fácilmente accesible.

Agradezco a María del Carmen Chamorro y a Luis Sierra la atenta lectura de una versión preliminar de esta nota, y sus comentarios.

Referencias

[Ch] María del Carmen Chamorro, *"¿Qué didáctica de las matemáticas necesita la sociedad del siglo XXI?".*

[Co] COMAP (1999) *Las matemáticas de la vida cotidiana,* Addison-Wesley/Universidad Autónoma de Madrid.

[Ha] Richard Hamming (1980) "The Unreasonable Effectivenness of Mathematics", en *American Mathematical Monthly*, volumen 87, número 2, pp. 81-90.

[Ha2] Richard Hamming (1980) *Coding and Information Theory*, Prentice-Hall.

[MT] MacTutor, Departamento de Matemáticas, Universidad de Saint Andrews, en http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/.

[Mi] John Milnor (1998) *John Nash and "A Beautiful Mind"*, *Notices of the American Mathematical Society*, volumen 45, número 10, pp. 1329-1332.

[Si] Simon Singh (1999) *El último teorema de Fermat*, Norma.

[Th] William P. Thurston (1994) "On proof and progress in mathematics", en *Bulletin of the American Mathematical Society* (NS), volumen 30, número 2, pp. 161-177.

[Va] Juan Luis Vázquez (2002) *Matemáticas, Ciencia y Tecnología: una relación profunda y duradera*, en http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/jvazquez/matcitec.ps.

SOBRE LAS REFLEXIONES DE OMAR GIL

Dra. María del Carmen Chamorro

En primer lugar, he de decir que me parece una experiencia interesante y enriquecedora, que un matemático, OMAR GIL, de los que yo llamo puros, es decir dedicado al estudio de la Matemática, sea esta aplicada o no, y de otro matemático, yo misma, que ve las Matemáticas a través del filtro de la educación, hablen sobre algo que les une por encima de cualquier otra consideración: su deseo de transmitir a los demás el placer y la utilidad de hacer Matemáticas en todos los niveles.

Mi distinción al hablar de matemáticos puros no se refiere a lo que un matemático entiende por tal, con esa denominación quiero distinguir al profesional matemático, aplicado o no, que tiene como objeto de investigación las propias Matemáticas, del didacta, que está obligado a salir de la disciplina matemática, aunque sin olvidarla nunca, y ayudarse de la Psicología, la Sociología, la Epistemología, etc. para investigar problemas específicos de la enseñanza de las Matemáticas.

Omar Gil coincide conmigo en la importancia de que la comunidad matemática se involucre en la resolución de los problemas que plantea su enseñanza, y a mí me hubiese gustado que avanzase alguna propuesta para hacer que la comunidad de los matemáticas tome conciencia de la importancia que eso tiene. Quisiera también que profundizase algo más sobre cómo podría evolucionar la enseñanza de las Matemáticos si hubiese un diálogo fructífero entre didactas y matemáticos, y qué trascendencia tendría eso en el desarrollo de la propia Matemática: más comprensión y presencia social de las Matemáticas, más vocaciones matemáticas, etc.

Una colaboración fundamental debería darse entre los matemáticos aplicados y los didactas, pues los primeros están muy bien situados para hacer notar a los segundos dónde está la Matemática en la vida cotidiana, de manera que lo segundos pudieran hacer de la realidad una fuente de inspiración para la enseñanza. No siempre los didactas saben bien, más allá de los ejemplos de siempre, la Matemática encerrada en cosas muy simples, y quizás debieran hacer cursos de formación a cargo de matemáticos aplicados, pues coincido plenamente con Omar Gil en que hay una gran parte del camino andado cuando el profesor es capaz de mostrar al alumno cómo la vida cotidiana funciona en parte gracias a las Matemáticas.

Quisiera poner el énfasis en un aspecto que a Omar Gil le parece casi trivial, es el relativo a indagar la parte de Matemáticas que hay en las profesiones más simples, por menos intelectuales, de nuestra sociedad. Para un didacta el lema "Matemáticas para todos" es casi una meta profesional a alcanzar, un principio irrenunciable. Principio realista que pretende tomar en consideración el fracaso escolar en Matemáticas, y la gran cantidad de ciudadanos que abandonan la enseñanza muy rápidamente para insertarse en el mundo laboral, y a los que hay que dotar de las herramientas mínimas para hacer frente a su trabajo cotidiano. Hablamos siempre de la enseñanza obligatoria, por lo que no se trata tanto de abordar conocimientos específicos, pues para ello están la enseñanzas profesionales, sino por el contrario rudimentos mínimos para integrarse con garantías de éxitos en el mundo laboral. Sin afán de polemizar, tan solo de matizar, quisiera dedicarle un pequeño espacio al problema de la intuición. Es muy cierto que como señala Omar Gil, la Matemática no avanzaría sin ella, y las grandes aportaciones a las Matemáticas han provenido siempre de matemáticos que atesoran la intuición como una de sus mejores cualidades, pues no en vano hacer Matemáticas superiores tiene mucho que ver con explorar tierras desconocidas y abrir caminos.

Pero en la enseñanza obligatoria las cosas tienen un carácter muy distinto, pues como decía Baudelaire "la imaginación viene trabajando", y el desarrollo de la intuición está fuertemente ligado a los conocimientos que se tienen, por lo que considero que la intuición es difícilmente desarrollable en los primeros niveles, en los que debemos sin embargo aspirar a poner los cimientos de la lógica.

Para terminar me parece muy interesante el séptimo párrafo del apartado 3 (Parece aconsejable…), y en esa línea creo que debería elaborarse una agenda de trabajo conjunto entre matemáticos y didactas. La conclusión es que estamos condenados a entendernos, y cuanto antes empecemos a hacerlo mejor.

Mi agradecimiento a Omar Gil por haber leído con atención mi modesta aportación, aprecio su esfuerzo en lo que vale.

OTRAS REFLEXIONES

Prof. Beatriz Rodríguez Rava

El trabajo de María del Carmen Chamorro[1] reubica y revaloriza la Didáctica de la Matemática como una ciencia joven en continuo crecimiento.
Afirma "...la Didáctica de las Matemáticas empieza a fraguarse como ciencia con paradigmas y métodos propios, separándose de forma irreversible de la Pedagogía y la Didáctica General, en los años sesenta."
Brousseau define la Didáctica de la Matemática como "(...) la disciplina científica y el campo de investigación cuyo fin es identificar, caracterizar, y comprender los fenómenos y procesos que condicionan la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas."[2]
Disciplina científica en tanto existe un grupo de investigadores que constituyen una comunidad internacional con intereses comunes que ha logrado un crecimiento importante, existe un marco conceptual y metodológico compartido y hay una difusión permanente y valiosa de resultados. Este grupo al igual que cualquier comunidad científica cuenta con variados canales de divulgación (congresos, seminarios, simposios, revistas especializadas, etc.) y ha venido desarrollado diferentes programas de formación.

La Didáctica de la Matemática ha procurado establecer su propia identidad marcando las características que la distinguen de aquellas ciencias que contribuyen a su desarrollo: la Pedagogía, la Psicología y las Ciencias cognitivas, entre otras. Esta identificación, como campo con una especificidad propia, la ha llevado a explicitar también las relaciones que mantiene con dichas ciencias.
La Didáctica de la Matemática se "apoya" en saberes generados por esas otras ciencias pero no se reduce a ellos.
La Didáctica no es independiente del contenido (matemático, en este caso) por lo que no puede "importar" saberes desde otras ciencias.
El estudio de las situaciones generadoras de conocimiento y el análisis de las interacciones necesarias solo se puede realizar estableciendo el vínculo con el contenido específico. La Didáctica no es independiente del contenido.

El objeto de estudio de la Didáctica de la Matemática es la comunicación del conocimiento matemático y las interacciones entre el docente, el alumno y el objeto de enseñanza.
Supone el análisis de las relaciones de enseñanza y aprendizaje con el contenido matemático.

En el marco de la Didáctica de la Matemática se destacan como teorías fundantes de la Didáctica Fundamental: la Teoría de Situaciones (Guy Brousseau), la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Yves Chevallard) y la Teoría de los Campos Conceptuales de Gerard Vergnaud.
Algunos autores, como Bosch, Fonseca y Gascón,[3] ubican las dos primeras en el Programa Epistemológico de Investigación en Didáctica de la Matemática por tomar "como base del análisis didáctico de cualquier fenómeno un modelo de la estructura y de la actividad matemática escolar."
En tanto que ubican a la Teoría de los Campos Conceptuales en el Programa cognitivo "donde se da prioridad al estudio de las características individuales de los sujetos como factor explicativo de los fenómenos de aprendizaje"[4]

[1] Chamorro, Ma. del Carmen (2005) – "¿Qué Didáctica de la Matemática necesita la sociedad del Siglo XXI?". Montevideo.
[2] Brousseau, Guy (1993) – "Fundamentos y métodos de la didáctica de la matemática". Traducción realizada con autorización del autor D. Fregona y F. Ortega en TRABAJOS DE MATEMÁTICA - Serie "B" No. 19/93 - Facultad de Matemática, Astronomía y Física (I. M. A. F.).Córdoba.
[3] Bosch, M; Fonseca, C; Gascón, J (2004) – "Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares". En Recherche en Didactique des Mathématiques.
[4] Ibidem.

La Teoría de Situaciones (TS) desarrollada por Guy Brousseau es una teoría de la enseñanza "que busca las condiciones para una génesis artificial de los conocimientos matemáticos bajo la hipótesis de que éstos no se construyen de manera espontánea."[5]

El objetivo de la Teoría de Situaciones es "comprender los procesos de aprendizaje y de enseñanza y las formas en que estos interactúan, pero también persigue el desarrollo racional de medios para controlar y mejorar las situaciones didácticas a los efectos de la reproducción en situaciones escolares. De aquí la importancia del análisis y estudio de las condiciones en las cuales se constituye el saber."[6]
Brousseau desarrolla los conceptos de *situación didáctica, situación a didáctica, devolución, institucionalización, contrato didáctico, obstáculos didácticos, entre otros.*

La Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) es fundada por Yves Chevallard a partir de la Teoría de la Trasposición Didáctica de su propia autoría. La Teoría Antropológica se centra fundamentalmente en la dimensión institucional del conocimiento matemático. La Matemática y el hacer matemático son construcciones humanas que se realizan en instituciones sociales. "Las nociones de obra matemática, praxeología, relación institucional al objeto, se proponen como los instrumentos para describir la actividad matemática y los objetos institucionales emergentes de tal actividad"[7].
La noción de praxeología es una de las ideas centrales de esta teoría. La praxeología u organización matemática es considerada como una entidad compuesta por: a) tipos de tareas, b) tipos de técnicas que posibilitan la resolución de dichas tareas, c) las tecnologías que describen o explican las técnicas y d) la teoría que fundamenta la tecnología.

La Teoría de los Campos Conceptuales (TCC) desarrollada por Gérard Vergnaud se centra fundamentalmente en el análisis de las adquisiciones de los conceptos matemáticos.
Esta teoría postula que un concepto está íntimamente relacionado a una variedad de situaciones y a su vez una situación remite inevitablemente a varios conceptos.
Surge el concepto de "Campo Conceptual" como el espacio de problemas y situaciones que exigen para su resolución un conjunto de conceptos, procedimientos y representaciones que están íntimamente vinculados entre sí.
Vergnaud sostiene que los conceptos no se construyen en forma aislada sino en relación con otros y que dicha construcción necesita de largos períodos de tiempo.

Otro de los aspectos que plantea Chamorro es la diferencia entre el resultado de la investigación matemática y didáctica. Es oportuno extender estas diferencias hacia la propia forma de generación de conocimiento.
La Didáctica de la Matemática apunta a la producción de conocimientos que ayuden a resolver los problemas que los docentes enfrentan, relacionados con el aprendizaje y la enseñanza de los contenidos matemáticos.
Esto supone la elaboración de conocimientos sobre un objeto de enseñanza y de conocimientos referidos a las condiciones didácticas necesarias para que los alumnos se puedan apropiar de ese objeto.
La actividad en clase es el eje de la investigación didáctica ya que es en dicho espacio en donde aparece la complejidad del objeto de estudio.
La Didáctica de la Matemática produce conocimientos didácticos a partir de diversas acciones:

* Investigación didáctica.
* Registro y análisis de experiencias de aula como fuente para la formulación de problemas a investigar.
* Diseño curricular y la explicitación de conocimientos didácticos.
* Las acciones de Desarrollo Curricular. Esta es una variante intermedia entre la formación en servicio y la investigación.

[5] Panizza, Mabel (2003) – "Conceptos básicos de la Teoría de Situaciones Didácticas" en Panizza, M. (Comp.) - Enseñar matemática en el Nivel Inicial y el primer ciclo de EGB. Editorial Paidós. Buenos Aires. 2003.
[6] Rodríguez Rava, B. (2004) – "Situaciones didácticas" en Rodríguez Rava,B; Xavier de Mello (Comps) - El Quehacer Matemático. Editorial Queduca. FUM TEP. Montevideo.2005.
[7] Godino,J; Font, V; Contreras, A; Wilhelmi,M. (2005) Articulación de marcos teóricos en Didáctica de las Matemáticas. Conferencia presentada en el I Congreso Internacional sobre la Teoría Antropológica de lo Didáctico. Baeza. 2005.

La entrevista didáctica es considerada por muchos especialistas, como un método auxiliar fundamental en la producción de conocimiento didáctico. Aporta nuevos elementos para entender mejor cuestiones relativas a los aprendizajes.
La Didáctica de la Matemática como espacio de producción de conocimiento ha venido abriéndose camino desde hace más de 40 años y como lo manifiesta Chamorro tiene un caudal de conocimiento importante que permite entender y mejorar los fenómenos de enseñanza.
En este recorrido tiene aún muchos obstáculos por vencer al igual que otras ciencias.
Brousseau afirmaba en 1999[8]:

"Más de tres mil años después de la invención del comercio, a la economía -ciencia de las condiciones de la difusión de los bienes materiales - le tomó doscientos cincuenta años empezar a salir de su existencia fantasmal y está aún lejos de proponer soluciones satisfactorias.
Para educar a los poco más de dos mil millones de no adultos debe haber en el mundo alrededor de cincuenta millones de personas que se ocupan profesionalmente de su enseñanza y de su educación junto con unos cuatro mil millones de padres de familia... El número de creadores y de difusores de las ciencias y de las técnicas es probablemente muy inferior a un millón de personas. Si el objetivo de la didáctica es importante, su fuente no lo es menos.
Sin embargo el estudio científico de los fenómenos de la difusión de los saberes científicos, por su parte, no cuenta más que con un número muy restringido de investigadores dispersos en instituciones diferentes, a veces concurrentes, esparcidas en caminos de investigación divergentes. La debilidad de los medios de elaboración y de difusión de los conocimientos didácticos es manifiesta.
No obstante, a pesar de ciertos vientos actuales que a veces soplan en la dirección contraria, la didáctica de las matemáticas no arrancó tan mal y progresa. Estoy convencido que entrará progresivamente en las prácticas científicas y sociales, y que va a contribuir a mejorar la educación de todos los niños."

[8] Brousseau, Guy (1999) – "Educación y Didáctica de las matemáticas" en Educación Matemática. México.