Libro para el Maestro

# Matemática en el Primer Ciclo

ADMINISTRACIÓN
NACIONAL DE
EDUCACIÓN PÚBLICA

CEIP
Consejo de Educación Inicial y Primaria

Libro para el Maestro

# Matemática en el Primer Ciclo

**Cuadernos de matemática. Inicial, primero, segundo y tercero. Especificaciones para el docente**
1.ª edición ©Administración Nacional de Educación Pública
Consejo Directivo Central
Consejo de Educación Inicial y Primaria
Comisión de Análisis Curricular de la Enseñanza Escolar de la Matemática (CACEEM), 2016
Bartolomé Mitre 1309 1.er Piso
Montevideo (Uruguay)
Tel./fax.: 2901 87 91

**Autores:**
Mtra. Rosa Lezué
Mtra. Ana Laura Lujambio
Mtra. Adriana Pico
Mtra. Silvia Hawuelka
Mag. Mercedes Laborde
Mag. Ana Novo
Mtro. Nicolás Alonzo
Prof.ª Carla Damisa
Prof. Gabriel Requena
Prof. Ricardo Vilaró

**Edición:**
IMPO

**Corrección:**
Laura Zavala

**Diseño:**
IMPO

**Impresión:**

**Depósito legal:**

**ISBN:** 978-9974-677-75-3

Impreso en Uruguay
Material publicado y distribuido por la ANEP-CEIP en los centros educativos dependientes del CEIP, en forma gratuita, con fines estrictamente educativos.

FE DE ERRATAS: En la edición del Cuaderno para hacer matemática en inicial, se omitió incluir a los autores:

- Prof.ª Carla Damisa
- Mtra. Silvia Hawelka
- Mag. Mercedes Laborde
- Mtra. Ana Laura Lujambio
- Prof. Gabriel Requena
- Mtra. Rosa Lezué

**Queda hecha la salvedad.**

**COMISIÓN DE ANÁLISIS CURRICULAR DE LA ENSEÑANZA ESCOLAR DE LA MATEMÁTICA (CACEEM)**

**REFERENTE TÉCNICO CEIP:** Mtro. Héctor Florit

**COORDINADORA TÉCNICA:** Mtra. Insp. Rosa Lezué

**EQUIPO TÉCNICO 2016:**

Mtro. Nicolás Alonso

Prof.ª Carla Damisa

Mtra. Silvia Hawelka

Mag. Mercedes Laborde

Mtra. Ana Laura Lujambio

Mag. Ana Novo

Mtra. Adriana Pico

Prof. Gabriel Requena

Prof. Ricardo Vilaró

**SECRETARIA TÉCNICA:** Mtra. Gabriela Salsamendi

**ASESORA ACADÉMICA:** Mag. Graciela Chemello

**GRUPO DE CONSULTA:**

Inspección Técnica de CEIP

Instituto de Formación en Servicio – IFS

Proyecto de Apoyo a la Escuela Pública Uruguaya – PAEPU

Federación Uruguaya de Magisterio – FUM – Quehacer Educativo

Ceibal

CEIP

Consejo de Educación Inicial y Primaria

# Índice

## Capítulo 2: Numeración racional en el Primer Ciclo



## Capítulo 3: Operaciones con números naturales en el Primer Ciclo

## Capítulo 4: Geometría en el Primer Ciclo

# Palabras para el docente

El Consejo de Educación Inicial y Primaria se propuso, para el período 2016–2020, poner énfasis en matemática y lengua.

Hace años que tenemos resultados adversos en los logros en matemática en el ciclo escolar.

En 2002 un 50% de los alumnos no obtenía logros aceptables y en los últimos años este porcentaje no ha variado.

Estas dificultades en matemática tienen un arrastre que hace que al momento de optar por bachilleratos o carreras eligen aquellas que no tienen esta asignatura.

La realidad impone que variemos las prácticas de enseñanza buscando dar respuesta a la falta de interés de los niños y al fracaso de sus aprendizajes.

La creación de una comisión de docentes y técnicos que reflexiona sobre matemática: CACEEM (Comisión de Análisis Curricular de la Enseñanza Escolar de la Matemática) hace posible la reflexión sobre las prácticas y pone a disposición de todos los colectivos del país situaciones-problemas, análisis de resoluciones realizadas por niños, materiales específicos y secuencias matemáticas de Inicial 5 a sexto año.

Nos proponemos desde el aprendizaje que los alumnos de 5 años en adelante aprendan a:

- poner en situación determinados conocimientos,
- resolver problemas comunicándose en lenguaje matemático,
- aplicar procedimientos y estrategias individuales.

Y desde la enseñanza a:

- trabajar con familias de problemas estableciendo regularidades, (coordinados con los perfiles de egreso de tercer y sexto año),
- realizar comentarios didácticos desde la gestión de clase ilustrados con trabajos de alumnos/as y algunas probables modificaciones para otros grados,
- planificar una progresión curricular de los avances a realizar año a año,
- profundizar el análisis didáctico en los colectivos docentes produciendo conocimientos propios en cada ámbito escolar.

El propósito del Consejo es que:

"la esencia de las matemáticas no es hacer las cosas simples complicadas, sino hacer las cosas complicadas simples" - Stanley Gudder, Universidad de Denver, 2017.

Mag. Irupé Buzzetti

Directora General del CEIP

# Matemática para el aula

## La actividad matemática en la ciencia y en la escuela

> La Matemática tradicionalmente se ha definido como una ciencia abstracta, exacta y deductiva cuyo objeto de estudio se centraba en el tratamiento de la cantidad. Esta concepción positivista de la ciencia supuso una relación unilateral con el conocimiento, restringiéndose este a ser objeto de trasmisión. En el paradigma de la Ciencia Social Crítica se concibe a la ciencia como una construcción histórica. [...] La Matemática en este marco se redimensiona como construcción del hombre; recupera su prestigio milenario desde la perspectiva histórica (Programa Educación Inicial y Primaria, 2008, pág. 61).

Desde esta perspectiva, uno de los objetivos generales del Programa de Educación Inicial y Primaria (PEIP) señala que se aspira al desarrollo de un pensamiento matemático que permita interpretar críticamente la realidad, actuar sobre ella y modificarla. Así, entonces, enseñar Matemática implica necesariamente pensar en los objetos de enseñanza desde la disciplina misma como construcciones culturales y por lo tanto tener presente que con ellos es posible realizar actividades y resolver situaciones diversas. Para lograr el objetivo señalado, los alumnos tendrían que acercarse a los contenidos, tanto a través de los diferentes aspectos matemáticos asociados a ellos, como a través de los tipos de práctica que los vinculan con la actividad matemática, con la forma de "hacer matemática" que es propia de esta disciplina. Afirma Itzcovich (2004): "Hay muchas maneras de conocer un concepto matemático. Las mismas dependen de todo lo que una persona (en este caso, los alumnos) haya tenido oportunidad de realizar con relación a ese concepto. O sea, el conjunto de prácticas que despliega un alumno a propósito de un conocimiento matemático constituirá el sentido de ese concepto para el alumno".

Otro de los objetivos generales del PEIP es: Lograr que los alumnos conjeturen, construyan argumentos, modelicen, analicen la pertinencia de los resultados obtenidos y logren comunicar procesos y razonamientos realizados.

Así como en la historia el conocimiento se construyó a partir de problemas de distinta índole, el sentido de un conocimiento es construido por los alumnos interactuando con los diferentes tipos de problemas que se les presentan y sobre los que reflexionan. Consideramos que una actividad constituye un "problema" matemático para un alumno en la medida en que involucra un enigma, un desafío a sus conocimientos matemáticos, es decir, si estos le permiten iniciar la resolución del problema y, para hacerlo, elabora un cierto procedimiento y aplica las nociones que tiene disponibles, modificándolas y estableciendo nuevas relaciones. (Cuadernos para el aula, 2007)

Se entiende entonces que el aprendizaje se producirá en forma progresiva, en la medida que los alumnos son enfrentados a diferentes problemas, en los que se podrán analizar las estrategias desplegadas al resolver para identificar los conocimientos puestos en juego, vincularlos con otros ya aprendidos y, posteriormente, relacionarlos con otros nuevos. En consecuencia, la resolución de problemas aislados no garantiza la construcción de conocimiento, sino que será necesaria la elaboración y reelaboración sucesiva de los conocimientos en situaciones propuestas desde la enseñanza.

Es importante señalar que la actividad que puede resultar problemática para un alumno no lo es necesariamente para otro, dependiendo de los conocimientos de que dispone. Para adecuar los problemas y que sean verdaderos desafíos para todos sus alumnos, el docente podrá modificarlos en función de distintos elementos de los mismos que Brousseau (1995) denomina "variables didácticas", y que expresa del siguiente modo: "[El docente] puede utilizar valores que permiten al alumno comprender y resolver la situación con sus conocimientos previos, y luego hacerle afrontar la construcción de un conocimiento nuevo fijando un nuevo valor de una variable. La modificación de los valores de esas variables permite entonces engendrar, a partir de una situación, ya sea un campo de problemas correspondiente a un mismo conocimiento, ya sea un abanico de problemas que corresponden a conocimientos diferentes".

Así podemos considerar variables didácticas referidas al problema, a los materiales que se ponen a disposición del alumno o no y a la organización de la clase. Entre las referidas al problema mencionamos: su estructura, el orden de presentación de la información, el tamaño de los números y si son o no redondos y la forma de presentación del enunciado (en lenguaje natural, con esquemas, o tablas o gráficos, con dibujos, con recursos informáticos, etc.). En relación con la organización y desarrollo de la clase, son variables el tiempo dedicado al problema, si se puede interactuar con un grupo o hay que resolver de forma individual.  Entre los materiales, por ejemplo, qué útiles de geometría es posible usar para dibujar una figura.

En el presente trabajo se presentarán, para cada perfil, familias de problemas con el fin de caracterizar lo que cada uno sugiere. La gestión de estos problemas es decisiva. Estos no son en sí mismos suficientes para generar el tipo de aprendizaje requerido desde el PEIP, sino que la discusión que se dé entre los alumnos en función del saber en juego, la defensa de distintas resoluciones, las decisiones que se vayan tomando, los acuerdos a los que se llegue serán determinantes para su logro.

De esta manera, algunos de los problemas presentados tendrán por objeto habilitar la exploración, es decir, permitir ensayar diversos caminos para llegar a una solución. Aunque esta solución pueda ser a veces errónea o incompleta, posibilitará la aparición de las concepciones de los alumnos que manifiestan un estado de conocimiento.

Otros problemas tendrán por objeto poner la mirada en los modos de representación que manifiestan las estrategias de resolución desplegadas y constituirán un excelente recurso para la comunicación. Estas representaciones también son objeto de enseñanza y colaborarán en el análisis que permitirá determinar la validez o no de un procedimiento y el posterior establecimiento de conjeturas, este último es otro aspecto fundamental de la actividad matemática.

Habrá problemas que tendrán que ver con proponer situaciones en las que sea necesario establecer relaciones entre diferentes conocimientos que, de otro modo y de forma aparente, no las tendrían.

> Un tipo de problema muy utilizado en la clase de matemática es el de los juegos. El sentido de incluirlo va más allá de la idea de despertar el interés de los alumnos. Jugar permite "entrar en el juego" de la disciplina matemática, pues se eligen arbitrariamente unos puntos de partida y unas reglas que todos los participantes acuerdan y se comprometen a respetar. Luego, se usan estrategias que anticipan el resultado de las acciones, se toman decisiones durante el juego y se realizan acuerdos frente a las discusiones (Cuadernos para el aula, 2007, pág. 22).

Al recurrir a los juegos como actividad de aprendizaje, no debemos olvidar que nuestro propósito es que se aprenda un determinado conocimiento. Por eso, el hecho de jugar no es suficiente para aprender: la actividad tendrá que continuar con un momento de reflexión durante el cual se llegará a conclusiones ligadas a los conocimientos que se utilizaron para el juego. Luego, convendrá plantear problemas de distinto tipo en los que se vuelvan a usar esos conocimientos: partidas simuladas, nuevas instancias de juego para mejorar las estrategias, tareas a realizar con los conocimientos descontextualizados.

Será preciso que, una vez realizada la actividad, se propicien espacios de discusión que permitan modificar, sostener o ajustar ideas de forma que se produzcan avances en relación con aquellas que resulten poco eficientes. La idea no es que el docente muestre cómo se resuelven en el pizarrón y que los niños se limiten a repetir los procedimientos, sino que se comience a construir las ideas a partir de la interacción entre los niños y el docente en relación con el saber en juego. De la misma manera, será necesario un trabajo sistemático en torno al contenido, perfil, aspecto, con cierto tipo de actividades similares, para que los alumnos puedan organizar y reorganizar sus ideas, establecer relaciones, abandonar ensayos equivocados y probar nuevos acercamientos a conocimientos, que muchas veces serán provisorios pero que abonarán el camino a conocimientos cada vez más acertados.

## La gestión docente del trabajo matemático

Las situaciones son claves en el aprendizaje de conceptos, pues como dice Vergnaud (1990): “es a través de las situaciones y de los problemas que se pretenden resolver como un concepto adquiere sentido para el niño” (pág. 133).

Organizar la enseñanza de modo que sea central la presentación a los alumnos de situaciones supone:

- Seleccionar el contenido los diferentes aspectos que este involucra y determinar su alcance.
- Formular los propósitos de enseñanza (objetivos).
- Elegir y adecuar problemas que consideren las variables didácticas.
- Anticipar los procedimientos que pondrán en juego los alumnos, incluyendo los erróneos e incompletos.
- Anticipar las intervenciones a realizar para movilizar el debate y obtener las conclusiones matemáticas perseguidas.

Entendido de este modo, el diseño o la planificación de actividades secuenciadas resulta clave, actividades donde se muestre una rica variabilidad en cuanto a los elementos a abordar sin descuidar la profundización que cada una de las temáticas reclama. Asimismo, como sostiene Chemello (2001), no debe olvidarse que:

> es esencial considerar que la estrategia a diseñar permita enseñar más y mejor a mayor cantidad de alumnos, teniendo en cuenta que la apropiación de conocimientos se inscribe en la doble continuidad: la que relaciona los conocimientos entre ellos y la que corresponde a su apropiación a lo largo del tiempo. Tomar esta problemática bajo análisis, no apunta a prescribir actividades y secuencias que puedan confirmar o renovar las utilizadas, sino que apunta a una profunda reflexión sobre los criterios en uso para diseñarlas y ordenarlas, comenzando por su reconocimiento y análisis, y continuando con la instalación de un debate para conservar los criterios en uso o para reformularlos (pág. 24).

## Algunas reflexiones para seguir avanzando

Más allá de las consideraciones anteriores, queremos destacar que en nuestro país deben reconocerse los esfuerzos realizados a partir de diferentes iniciativas para avanzar en una enseñanza de la Matemática acorde a las actuales necesidades de formación de las niñas y niños, centrados en la idea de favorecer la reflexión en torno a diferentes obstáculos. Se hace referencia, sin dejar de reconocer la factible existencia de otras iniciativas desarrolladas en el territorio nacional, a los diferentes cursos de Formación en Servicio del Programa de Apoyo a la Escuela Pública Uruguaya (ex-MECAEP) y del recientemente establecido Instituto de Formación en Servicio del CEIP, a los trabajos del Programa de Mejoramiento de la Enseñanza de la Matemática de la ANEP, a las reflexiones docentes, artículos e investigaciones difundidos en revistas de distribución masiva entre los maestros como *Quehacer Educativo* y en los portales educativos oficiales.

De esta manera, mientras se ha intentado promover el estudio de los "objetos matemáticos", simultáneamente se ha incentivado una exhaustiva revisión de las tradicionales prácticas de enseñanza en la escuela, así como de los aprendizajes o habilidades que estas han tendido a consolidar entre los alumnos. Y en el marco de estas revisiones es necesario considerar las sustantivas modificaciones introducidas por la reforma curricular de la anterior década. Precisamente, cuando se efectúa un mínimo análisis de los fundamentos que sustentan los nuevos "contenidos" incluidos en el Programa de Educación Inicial y Primaria (2008), puede evidenciarse el acento dado a ciertos elementos antes desatendidos desde el punto de vista curricular.

Los problemas incluidos en este cuaderno forman una pequeña colección de situaciones que pueden ser planteadas en el aula, en los diferentes niveles. Su uso dependerá de las decisiones que tome el docente y a nivel de la institución, teniendo en cuenta los proyectos departamentales, de centro y áulicos, el contexto, los conocimientos de los niños, las particularidades de cada grupo, etc. La lectura, análisis y discusión de las propuestas derivará seguramente no en la mera ejecución de las propuestas aquí presentadas sino en la elaboración de otras nuevas adaptadas a las características antes mencionadas.

De igual forma, la consulta a la bibliografía usada y recomendada permitirá ampliar la perspectiva presentada en *Libro para el maestro. Matemática en el Primer Ciclo*, multiplicar la variedad de propuestas y plantearse nuevas interrogantes sobre la enseñanza de la Matemática.

# Capítulo 1: Numeración en el Primer Ciclo

## 1.1 Consideraciones curriculares

### a. El trabajo con numeración en el Primer Ciclo

El desarrollo de una competencia numérica es el propósito del trabajo con la numeración natural. Para ello es necesario que el niño compare los números, los ordene, opere con ellos, resuelva distintos problemas numéricos, es decir, que se familiarice con el número y la utilidad del cálculo aun cuando no haya comprendido todas las propiedades del Sistema de Numeración Decimal (SND) ni haya construido la noción de número, conocimientos ambos que requieren un tiempo lento y prolongado de aprendizaje.

Kamii (1989), revisando la clasificación entre tipos de conocimientos establecida por Piaget, ubica al número como conocimiento matemático, como relación creada mentalmente por cada individuo, como idea. En tanto, el SND es un conocimiento social, cultural, histórico, que responde a una convención y que se construye con información del entorno, por abstracción empírica. Piaget plantea que se accede a la noción de número por abstracción reflexionante, constructiva, a través de relaciones de orden y de inclusión jerárquica. Ambas, la abstracción empírica y la reflexionante son necesarias para la construcción del número como invariante lógico y para la construcción del sistema de representación.

En relación a la enseñanza de la numeración, Lerner y Sadovsky (1994) plantean un recorrido didáctico cuyo punto de partida implica el uso de los números, la búsqueda de regularidades y la reflexión sobre ellas; enfatizando, más allá del planteo de "buenas" situaciones, la necesidad de una intervención docente adecuada que posibilite la realización de diferentes acercamientos a este objeto de conocimiento.

En el mismo sentido, el Programa Escolar vigente expresa que la noción de "número resulta de las distintas situaciones prácticas que surgen a partir de los problemas que le dan sentido, de las propiedades que el niño encuentra en las mismas, de las representaciones, de sus relaciones y de las operaciones" (pág. 61). Y agrega que el número natural aparece como medio para ordenar objetos y conjuntos y, el número racional como medida de cantidades (discretas y continuas), como probabilidad, como relación entre medidas, como coeficiente entre dos magnitudes proporcionales. Ambos –el número natural y el racional– pueden usarse como elementos de una estructura algebraica.

La enseñanza del número y del sistema de numeración atraviesa toda la escolaridad por lo que es necesario preguntarnos: ¿qué entendemos por sistema de numeración?, ¿qué entendemos por número?, ¿cómo se relacionan esas ideas? Seguramente surgen numerosos ejemplos en los que usamos números, pues el concepto de número está apoyado en el uso en distintas situaciones y representaciones.

### b. Avances en el Primer Ciclo

Los números naturales tienen entre sus funciones la de servir para contar una cantidad de objetos y poder recordar esa cantidad, sin necesidad de tenerlos presentes o transportarlos y, eventualmente, poder comunicarla a otros. A esta función del número se le denomina memoria de la cantidad. Cada vez que nos preguntamos ¿cuántos?, el número está funcionando como memoria de la cantidad y refiere a su aspecto cardinal. Aparece allí la idea de conteo.

> […] El recorte de la historia de la creación de los números nos permite ver claramente cómo los niños construyen este conocimiento de manera similar, ya que una de las estrategias más utilizadas por ellos, en el jardín de infantes para comparar colecciones es, justamente la correspondencia término a término. Si se incrementan las cantidades puestas en juego en las situaciones didácticas pensadas con la intención de incidir en los conocimientos previos, los niños, al igual que lo hizo la humanidad, se apropiarán del conteo (Ressia de Moreno, 2003).

Para lograr el conteo lo primero que debe ser objeto de enseñanza es el recitado de la serie numérica y la correspondencia objeto-palabra-número. Esto deberá ser abordado desde inicial sistemática e intencionalmente ya que resulta una herramienta indispensable para el alumno que le permite acercarse al número en su aspecto cardinal.

En este sentido es muy probable que hasta el 15, tenga que apelarse a la memorización de la serie, pero de allí en adelante, la serie numérica oral puede generarse mediante reglas del sistema de numeración, y los niños intuitivamente van encontrando sus regularidades.

Otro de los usos del número es la posibilidad de comunicar a otro la cantidad de elementos de una colección y eso lleva a un registro y a una interpretación de los símbolos, que según la evolución en los conocimientos de los niños puede ser diferente. Es a partir de las diferentes situaciones didácticas a las que los alumnos son enfrentados que, según las investigaciones de Hughes (1987), podrán presentarse en el aula distintos registros: idiosincrásico, pictográfico, icónico y/o simbólico.

Los números también permiten guardar un orden en la memoria, una posición de un objeto en una serie ordenada. Este es el aspecto ordinal del número. Además, los números permiten anticipar acciones aún no realizadas, es decir, calcular.

Diversas investigaciones en el campo de la didáctica de la Matemática (Lerner, Sadovsky y Wolman, 1994; Alvarado y Ferreiro, 2000; Quaranta, Tarasow y Wolman, 2003) concluyen que los niños construyen conocimientos sobre el sistema de numeración, aunque no se los haya enseñado explícitamente. Un ejemplo son las ideas que elaboran al comparar números y que ellos expresan diciendo “a mayor cantidad de cifras más grande es el número” o “el primero es el que manda”. Otro ejemplo es el conocimiento de algunos números especiales, los nudos –números terminados en cero– cuyo reconocimiento precede al de otros números que son anteriores en la serie numérica. Asimismo, establecen relaciones entre la numeración escrita y la numeración hablada, apoyándose en esta para la producción de escrituras.

Estas ideas, que en general provienen del hecho de que los niños están inmersos en una cultura en la cual los adultos son usuarios del sistema de numeración, constituyen un punto de partida para nuevos aprendizajes.

El sistema de numeración se organiza según reglas o propiedades que no resultan evidentes. Es más, la comprensión del mismo es un largo proceso de construcción que se inicia muy tempranamente y se prolonga más allá del Primer Ciclo ya que, para poder dominarlo, es necesario comprender las relaciones aditivas y multiplicativas que subyacen a su organización. Por estas razones una presentación fragmentada, parcializada, o de la enseñanza de los números uno a uno, no favorece la apropiación de estas regularidades.

En el Primer Ciclo se hará especial énfasis en el trabajo con los números naturales, postergando un abordaje más amplio para el ciclo siguiente con la numeración racional. Si bien existe una división por rango numérico en los primeros grados, esta división no debería dejar afuera números más grandes. Dominar el campo numérico significa saber leer, escribir, ordenar, calcular y comparar números, pero una enseñanza centrada en el sistema de numeración debe ocuparse también de analizar la relación entre la posición de una cifra y su valor, de allí la descomposición en “dieces”, “cienes”, “miles”.

Cabe entonces una pregunta: ¿cuál es el sentido de enseñar la unidad, decena, centena? La descomposición de los números, en estos términos, está asociada al funcionamiento de los algoritmos convencionales ya que para que estos sean correctos es necesario ubicar las cifras en los órdenes numéricos correspondientes.

Esta “enseñanza” de la numeración apoyada en unidades, decenas, centenas, trajo aparejada la presentación de la decena agrupando diez elementos y formando un atadito. Sin embargo, esta representación aditiva no respeta la posicionalidad de nuestro Sistema de Numeración Decimal (SND) pues ese "atadito" vale 10 cualquiera sea el lugar donde se lo coloque.

Se propone entonces iniciar el trabajo de la numeración con descomposiciones aditivas que permitan explorar los números de forma de poder pensar el 26 como 10 + 10 + 6, 20 + 6, 20 + 2 + 2 + 2, 13 + 13, etc. Esta variedad de representaciones puede generar discusiones que apunten a reflexionar sobre los números, abriendo la posibilidad a la argumentación y la justificación. No se trata de que desaparezcan de la escuela los términos de unidades, decenas y centenas, sino que en los primeros años es preferible poner el foco en relaciones aditivas en vez de multiplicativas.

## c. Contenidos programáticos y perfiles

Al analizar en el Programa Escolar (2008) los contenidos programáticos correspondientes a Numeración natural es posible organizarlos en los siguientes aspectos: el conteo de colecciones, las representaciones oral y escrita de los números naturales, las regularidades del SND, las composiciones y descomposiciones aditivas y multiplicativas, el valor posicional y el orden.

| Año | Contenidos ligados a los perfiles |
|---|---|
| Tres años | La serie numérica oral (mínimo hasta 5). **(Conteo, representaciones)**<br>La identificación de símbolos numéricos de una cifra. **(Regularidades, representaciones)** |
| Cuatro años | La serie numérica oral (mínimo hasta 10). El número como cuantificador. **(Conteo, representaciones)**<br>Los números naturales entre el 1 y el 10. **(Representaciones)** |
| Cinco años | La serie numérica oral (mínimo hasta 30). **(Conteo, representaciones, regularidades)**<br>Los intervalos entre decenas. **(Regularidades)**<br>La **composición y descomposición** aditiva de cantidades.<br>La relación de **orden** (mayor, menor e igual). Los intervalos entre decenas. Las relaciones anterior, siguiente. |
| Primer año | Las **representaciones** simbólicas: escrituras aditivas equivalentes.<br>La serie numérica oral. Mínimo hasta 190. Los intervalos con diferentes frecuencias (+2; +5) **(Conteo, representaciones).**<br>La relación de igualdad entre cantidades. Mínimo hasta tres cifras. **(Representaciones, regularidades)**<br>La serie numérica oral. El número par e impar. **(Regularidades)**<br>Las representaciones simbólicas: escrituras aditivas equivalentes. La **composición y descomposición** de cantidades considerando la decena siguiente.<br>La **composición y descomposición** de cantidades considerando la decena siguiente. **(Valor posicional)**<br>Las relaciones anteriores y siguientes. **(Orden)** |
| Segundo año | La serie numérica oral. Mínimo hasta 4 cifras. **(Conteo, representaciones, regularidades)**<br>La igualdad en las expresiones matemáticas. **(Representaciones)**<br>Las **representaciones** simbólicas: escrituras multiplicativas equivalentes. **(Composición y descomposición)**<br>La composición y descomposición aditiva.<br>El cero en el sistema de numeración decimal. **(Valor posicional, representaciones)**<br>Las propiedades del conjunto de los Números Naturales: - el primer elemento es cero "0", - no tiene último elemento. **(Orden)**<br>La relación de **orden**: comparaciones. |
| Tercer año | La serie numérica. Mínimo hasta 5 cifras. **(Representaciones, regularidades, conteo)**<br>La comparación de igualdades. **(Composición y descomposición, representaciones, orden)**<br>**Valor posicional.** |

Al considerar el siguiente cuadro en relación con el anterior de contenidos año a año se advierte que los perfiles de egreso de tercer año derivan, para cada aspecto, de la secuenciación planteada.

| Conceptos y contenidos programáticos Vinculados | Perfil de egreso de tercero |
|---|---|
| **Conteo:** recitado, correspondencia biunívoca, cardinalización. | Seleccionar y utilizar estrategias de conteo en la resolución de distintas situaciones.<br>Contar una colección de dos en dos, de tres en tres, de diez en diez, etc. |
| **Representaciones:** producción de escrituras numéricas e interpretación de las mismas. | Identificar números naturales hasta cuatro cifras en registro oral y escrito.<br>Producir escrituras equivalentes para un mismo número. |
| **Regularidades:** de la serie numérica oral y escrita. Regularidades en números primos, pares, múltiplos, divisores, divisibilidad. | Reconocer regularidades del Sistema de Numeración Decimal como apoyo para la representación numérica y el cálculo. |
| **Composición y descomposición:** aditiva y multiplicativa. | Componer o descomponer números aditiva y multiplicativamente generando escrituras equivalentes como estrategia de resolución en situaciones de cálculo. |
| **Valor posicional:** valor y lugar de cada cifra. | Identificar el valor posicional y absoluto de las cifras de un número.<br>Usar el valor posicional de un número natural en situaciones de cálculo. |
| **Orden:** mayor / menor / igual, anterior / siguiente, número inserto en un intervalo (entre) | Comparar y ordenar números naturales de varias cifras como estrategia de resolución de distintas situaciones. |

# 1.2 Familias de problemas

## a. El conteo de colecciones

### ¿De qué hablamos cuando hacemos referencia al conteo?

Diremos que contar es cuantificar una colección, o sea, asociarle a esa colección un número natural, mientras que llamaremos conteo a las estrategias utilizadas para contar a los efectos de cardinalizar una colección. En ambos casos, es necesario previamente tener determinado el conjunto. Una vez cuantificada la colección, el número asociado a ella es una herramienta potente para desarrollar distintas actividades como comparar colecciones o identificar el nuevo cardinal de una colección en la que se agreguen o quiten elementos sin necesidad de tenerlos presentes.

### ¿Qué tipos de problemas ayudan a poner en juego este aspecto?

Se propone el planteo de situaciones que requieran conocer el cardinal de una colección sin ceñirnos a topes numéricos por grado. La enseñanza de la serie numérica estará presente a través de la focalización de intervalos numéricos, descartando la progresión uno a uno como secuencia “obligada”. Los enunciados no anticiparán la acción a realizar: “cuenta la cantidad de objetos” sino que se pretende hacer surgir el conteo como herramienta de solución para problemas como: “¿Cuántos 5 se escriben desde el 500 al 600?”.

## Problemas para contar colecciones (I)

**Problema 1** - Paradas del ómnibus

Un ómnibus interdepartamental se detiene para que suban o bajen pasajeros cada 3 km. Si se detuvo en el km 246, ¿cuántas veces se detendrá antes de llegar al km 321?

Este problema, pensado para segundo o tercer año, dependiendo de los números y del intervalo elegido, apunta a que se realice el conteo de 3 en 3 a partir del 246. Para dar respuesta a la situación planteada, el alumno debe contar los números obtenidos cuantificando las veces que el ómnibus se detiene.

**Problema 2** - El juego de las casillas

**Materiales:**

- Una tabla como la siguiente

| n.° de salida | carta de salto | números que obtengo | | | | | | | | puntaje |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | |

- 20 cartas de “salida”, por ejemplo 945.
- 14 cartas de “salto”, por ejemplo:
  Avanza de 10 en 10. Retrocede de 5 en 5.
- Una calculadora

**Reglas de juego:**

- Pueden participar hasta 5 jugadores.
- En cada partida se debe dar vuelta una carta de “salida” y una carta de “salto”.
- Cada jugador debe anotar en su tabla una serie de ocho números a partir del número de la carta de “salida” y de acuerdo a la carta de “salto”.
- Cuando todos los jugadores completaron la tabla verifican con la calculadora. Cada jugador se anota un punto por cada número correcto.
- Al cabo de 6 partidas gana el que obtuvo mayor puntaje.

Cada alumno pondrá en juego la estrategia más acertada acorde a su estado de conocimiento así como también podrá ponerla a prueba al validar los resultados mediante el uso de la calculadora. Esto además permite que su uso sea avalado como un instrumento útil en la clase de matemática y aparezca la necesidad de explicitarlo. Al proponerse una validación con este instrumento se está favoreciendo también el vínculo entre el conteo y el cálculo.

Normalmente los alumnos presentan dificultad al comprobar los resultados obtenidos con la calculadora, ya que si bien se dan cuenta de que pueden sumar sucesivamente la carta de salto, no prestan atención a los resultados parciales y entonces no les encuentran significado.

Lo interesante también de este problema son las discusiones que se generan a la interna de los grupos que ponen de manifiesto la necesidad de argumentar los resultados obtenidos, fundamentalmente, cuando se producen diferencias.

Las diferentes argumentaciones pasan, por ejemplo, por la explicitación de las estrategias usadas, por las dificultades que se presentan en los nudos, por la forma de utilizar la calculadora.

Estas discusiones pueden ser tomadas en un posterior trabajo grupal en donde se expliciten las estrategias usadas y los caminos recorridos para llegar a un procedimiento válido, así como procedimientos más eficientes que otros.

También se podrán plantear nuevas preguntas o problemas vinculados al problema inicial que recapitulen lo elaborado durante el juego y posibiliten una sistematización, como por ejemplo:

**Problema 2.1**

La carta de salida era 798 y la carta de salto "avanza de 3 en 3". ¿Será cierto que en el número a anotar cambian todas las cifras?

**Problema 2.2**

En la carta de salto "retrocede de 5 en 5" algunos compañeros restaban 10 y luego sumaban 5, ¿qué opinan de esto?

**Problema 2.3**

La carta de salida es 386 y la carta de salto "avanza de 5 en 5". Martín anotó 381. ¿Cómo pudo haber pensado si él afirma que no retrocedió?

**Problema 2.4**

Estela dice que para comprobar si lo que había hecho estaba bien multiplicaba la carta de salto por 8 y luego lo sumaba o restaba, según si tenía que avanzar o retroceder, a la carta de salida. Ella afirma que el resultado obtenido de la multiplicación tenía que coincidir con el último número anotado. ¿Qué opinan ustedes?

**Problema 3**

Helados de dos sabores
Para su cumpleaños Marcela quiere servir helados de dos sabores de tal forma que un sabor sea de fruta y otro de crema.

Tiene estos cuatro sabores de fruta: frutilla, limón, ananá y durazno.

Tiene estos dos sabores de crema: crema de vainilla y crema americana.

¿Cuántas posibilidades diferentes puede preparar?

Este problema, al preguntar sobre cuántas son las diferentes posibilidades de helado que se pueden preparar, conlleva a la cuantificación de dichas posibilidades y en ese sentido se constituye en un problema de conteo. Apunta fundamentalmente a que los alumnos busquen estrategias para organizar los datos y, en definitiva, organizar el conteo, permitiéndoles realizar la cuantificación solicitada.

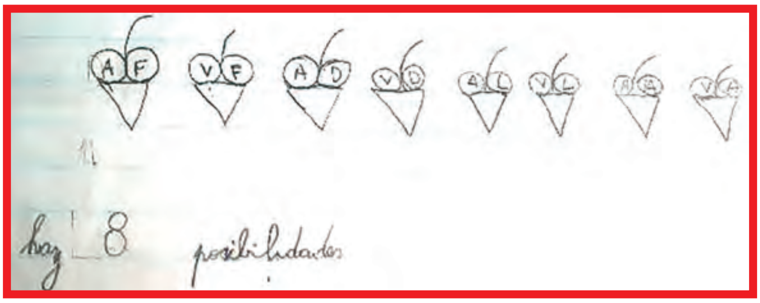
Es muy probable que los alumnos recurran a diferentes estrategias como pueden ser el dibujo, anotar las posibilidades una a una, hacer un diagrama de correspondencia y hasta llegar a hacer un cuadro de doble entrada, aunque difícilmente este sea un recurso espontáneo. Una vez organizados los datos para contar es necesario cuantificar para dar respuesta. Algunas veces el alumno puede quedar a mitad de camino por lo laborioso de la estrategia elegida.

Así, por ejemplo, si son anotadas o dibujadas todas las posibilidades, puede suceder que el alumno dé por terminada la situación con el dibujo, no llegando a una respuesta numérica. Pero también es muy probable que se recurra al conteo uno a uno para dar la respuesta. Por otro lado, si se organizan las posibilidades realizando correspondencias, puede suceder que realicen todas las correspondencias y luego las cuenten de 1 en 1, de 4 en 4, o de 2 en 2 en este caso, según como lo hayan organizado. Es decir, poniendo en primer lugar la crema y a cada sabor de crema hacerle corresponder los 4 de fruta, o poniendo en primer lugar el sabor de fruta y a cada uno hacerle corresponder los dos de crema. También es probable que no se dibujen todas las combinaciones y se anticipe que se repite el mismo número de combinaciones si cambia, por ejemplo, el helado de crema de vainilla por el de crema americana. En los últimos casos descriptos probablemente verán con mayor claridad la suma de iguales o la multiplicación que resultan como herramientas más eficaces.

En cuanto a organizar la información en un cuadro de doble entrada, es casi seguro que no ocurra a menos que se hayan realizado varias situaciones semejantes en las que se haya valorado esta organización.

En resumen, este es un problema de conteo en el que es necesario organizar los datos y cuya solución experta es la multiplicación. Nos advierte sobre la importancia de la intervención docente intencionada para hacer evolucionar las estrategias de los alumnos. Es importante también, que los alumnos puedan avalar sus procedimientos explicando el porqué de su realización. Diferentes propuestas en las cuales el docente vaya complejizando la situación, ya sea ampliando el rango numérico o estableciendo nuevos niveles de combinación en donde el diagrama de árbol sea una organización eficaz, colaborarán a hacer avanzar el conteo. Lo importante es que las propuestas sean tales que el procedimiento no esté sugerido, para que de esta forma sean los propios alumnos los que ensayen diferentes estrategias para realizar el conteo.

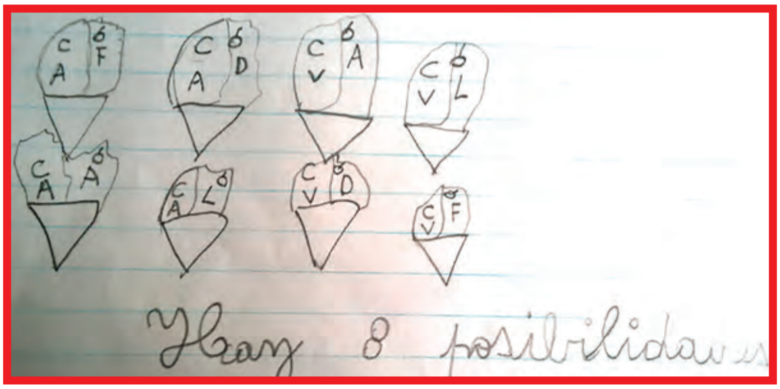
Veamos algunos registros de procedimientos de resolución:




**Registro 1**

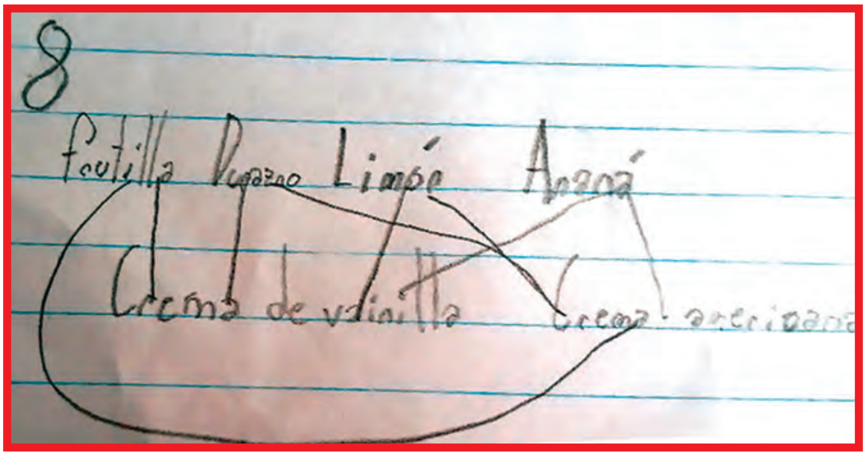
En este ejemplo el alumno recurrió al dibujo de los helados organizándolos de tal manera que a cada fruta le asignó el helado de crema correspondiente y luego contó todas las posibilidades.

Lo mismo ocurre en el ejemplo siguiente con una organización similar:



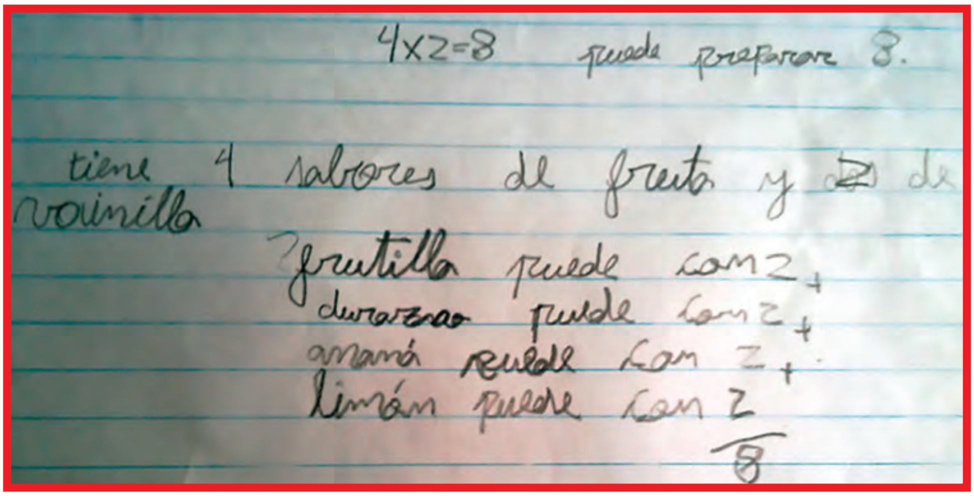

Registro 2

En el siguiente caso el alumno optó por anotar los sabores y luego hacer corresponder a cada helado de fruta el sabor de crema posible. Luego procedió al conteo.




Registro 3

Los ejemplos que se muestran a continuación permiten observar que estos alumnos vieron la suma o la multiplicación como herramientas para resolver el problema e intentan explicar cómo lo pensaron.




Registro 4

4 x 2 = 8

Puede prepararas 8 helados de diferentes sabores.

Porque son 4 sabores de fruta y 2 sabores de crema.

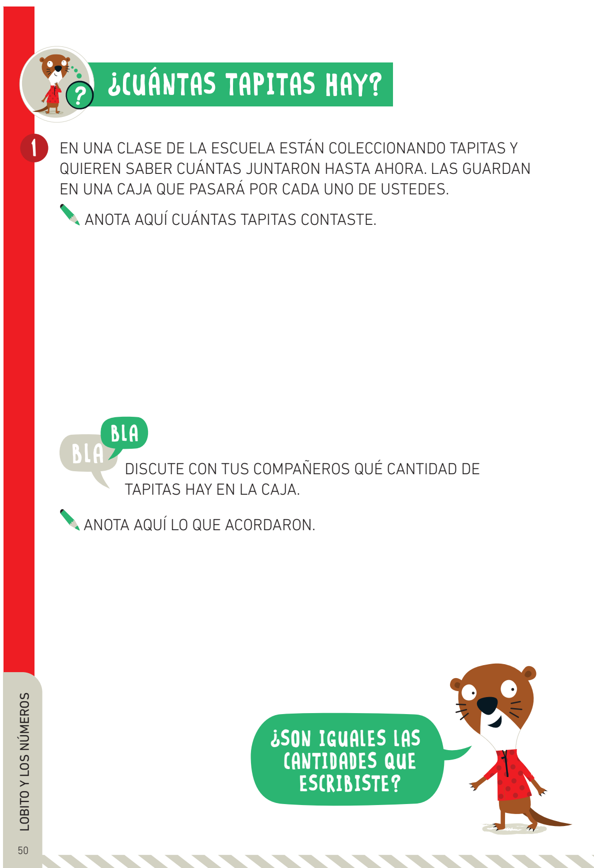
Registro 5

porque 2 x 4 = 8 y como hay 4 frutas y 2 cremas 2 x 4 = 8 y puede tener 8 helados diferentes

Registro 6

## Problemas para contar colecciones (II)

### Problema 1




Este problema puede ser propuesto en todos los grados del ciclo, desde NI4 a tercer año variando la cantidad de elementos a ser contados.

Se pide a los alumnos que lo hagan primero en forma individual para que cada uno tenga la oportunidad de realizar el conteo. Luego, al decidir en grupo sobre cuál de todas las anotadas es la cantidad correcta, se está favoreciendo la comunicación de los resultados y de los procedimientos utilizados, así como la discusión a la interna de cada equipo.

Si el número de tapitas es lo suficientemente grande, probablemente haya diferencia en el conteo realizado por los integrantes del grupo. Estas diferencias pueden estar dadas porque se "perdieron" al realizarlo, se saltearon números porque tuvieron que avanzar mucho en la serie y tal vez no la dominen tanto, u otras circunstancias a las que el maestro estará atento mientras vaya circulando por los equipos.

La idea es que, al tener que contar una cantidad importante, surja como necesidad la organización del conteo como forma de control del mismo.

En los niveles de inicial, un modo de intervención docente podrá estar dado con preguntas del tipo: ¿Cómo pueden estar seguros de que contaron todas? ¿Cómo pueden estar seguros de que no contaron dos veces una misma tapita?

A medida que las estrategias de conteo van avanzando, y las cantidades aumentan, en el primer año de primaria podría surgir otro tipo de preguntas como: ¿Por qué les dio diferente? ¿Cómo podrían hacer para no "perderse" si la cantidad es tan grande? ¿Habrá alguna manera de ir contando de a poco? Estas preguntas tienen la intencionalidad de que se vea la ventaja de realizar agrupamientos que faciliten el conteo. Dependiendo del dominio de la serie que tengan los alumnos o del conocimiento acerca de las regularidades, serán las relaciones que puedan realizarse y surgirán los diferentes agrupamientos. También dependerá de la cantidad en cuestión. Para algunos resultará más fácil el conteo de dos en dos, para otros de cinco en cinco o de diez en diez. El docente, por su parte, podrá promover los diferentes agrupamientos, según las relaciones con otros conocimientos que le interese ir estableciendo.

**Problema 2**


Este problema conduce a contar los elementos de una colección y cuantificarlos. Es un problema de conteo, pero dado que no hay un orden que pueda seguirse para realizarlo, exige su organización. Los alumnos podrán ir tachando las bicicletas que van contando, o podrán ir realizando agrupamientos para que resulte más sencillo el conteo. Estas estrategias, que pueden surgir de manera espontánea, serán objeto de análisis en una discusión posterior que pueda generar el docente a propósito de la actividad, y en caso de no aparecer deben ser presentadas con el fin de avanzar a partir de lo realizado por los alumnos.

Una variante para este problema podría estar dada de la siguiente manera:

“En un negocio hay 12 bicicletas, ahora le entregan estas. ¿Puedes decir cuántas tiene?”.

Este nuevo problema, si bien puede resolverse contando las bicicletas y sumando esa cantidad a la cantidad dada, es posible resolverlo también realizando sobreconteo. Es decir, contando a partir del cardinal dado, en este caso el 12, sin que estos elementos estén presentes, hasta cuantificar la nueva colección.

## Problemas para contar colecciones (III)

**Problema 1** - Trenes con tres vagones

Tengo un tren con tres vagones, uno amarillo, uno rojo y uno verde. ¿Cuántos trenes distintos se podrían armar con los tres vagones?

En este problema, tal como vimos en el de los helados planteado para tercer año, el conteo surge como estrategia para responder a la pregunta “¿cuántos trenes?”. Exige organizar las diferentes posibilidades y luego de hacerlo es necesario contar. Los alumnos podrán pensar:

Un tren: vagón amarillo - rojo- verde ---- Otro tren: rojo - verde - amarillo ---Otro: verde - rojo - amarillo.

De esta manera inician la creación de diferentes trenes sin organizar los datos con un criterio determinado. Es una primera estrategia con la que es muy posible equivocarse ya que el control de los casos detallados se hace difícil. Otros alumnos, o tal vez los mismos luego de variadas situaciones de este tipo, podrán ir adquiriendo cierta sistematización y plantear:

| | |
|---|---|
| Un tren: amarillo - rojo - verde | Dos: amarillo - verde - rojo |
| Tres: rojo - verde - amarillo | Cuatro: rojo - amarillo - verde |
| Cinco: verde - amarillo - rojo | Seis: verde - rojo- amarillo. |

**Problema 2**

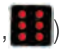
En la panadería están atendiendo al cliente número 153. Luego entran 15 personas más. ¿Cuál es el número que saca el último en llegar?

El problema exige que el alumno empiece a contar a partir del 153 y continúe haciéndolo considerando las quince personas que ingresan luego al local. Se realiza un sobreconteo y un doble conteo pues es necesario llevar el control de los ingresos.

A lo largo de la presentación de estos problemas, se han puesto en juego habilidades que implican el dominio del recitado de la serie, el establecimiento de una correspondencia biunívoca objeto-número y la cardinalización de la colección a contar. También se ha incorporado la necesidad de organizar la colección a contar de forma que todos los objetos sean contados y no se repita ninguno, pudiendo hacerlo a partir de cualquier número, “hacia atrás”; construyendo una nueva colección en relación a un cardinal; comparando e igualando colecciones; realizando el conteo de cantidades más grandes de forma organizada y más rápida, haciendo subdivisiones de 2, 5, 10 elementos.

## b. Las representaciones de los números naturales

### ¿Qué comprende el aspecto representaciones?

El aspecto representaciones comprende tanto la producción como la interpretación de las escrituras numéricas. La producción hace referencia a la escritura de números en distintos registros de representación (lenguaje natural, gráfico, simbólico) e incluye tanto las escrituras convencionales (6, 28, etc.) como las no convencionales (IIIIII, ). La interpretación de escrituras implica la lectura de notaciones numéricas en los diferentes registros reconociendo el mismo número en cada uno de ellos.

Además, el dominio de las distintas representaciones por parte del alumno le da la posibilidad de decidir acerca de la pertinencia de utilizar –ya sea escribiendo o leyendo– determinada escritura numérica en función de la situación que se plantea.

### ¿Qué tipos de problemas proponer?

El tránsito de los alumnos hacia las escrituras convencionales requiere proponer situaciones didácticas en las que los números aparezcan como herramienta de solución y que –a través de la intervención docente– le permitan al alumno poner en conflicto las hipótesis construidas en torno a la producción e interpretación de escrituras numéricas: el convencimiento de que los números se escriben tal como se dicen y el de que un número es mayor que otro si tiene más cifras.

## Problemas de interpretación o identificación de escrituras numéricas

**Problema 1**

Ana escribió correctamente el número **quinientos treinta y cuatro.** ¿Cuál de estos números escribió?

A) 500304
B) 50034
C) 5304
D) 534

*Actividad extraída de la Evaluación en Línea (2015)*

Este problema, que podría proponerse en un segundo o tercer año, requiere, por parte del alumno, transformar la representación numérica “quinientos treinta y cuatro” –dada en lenguaje natural– en otra que es la que corresponde a la escritura convencional simbólica del mismo número. Esto supone identificar, entre las cuatro escrituras simbólicas de números naturales que se proponen como opciones, la que coincide con la que se plantea a través de su nombre dado en lenguaje natural. El énfasis, en este caso, está puesto en la lectura y específicamente en la identificación de números naturales en el registro "oral" –literal– y escrito. Esto implica por parte del alumno el reconocimiento de escrituras equivalentes del mismo número (una en lenguaje natural y otra en forma simbólica convencional). La opción elegida aporta información al maestro acerca del estado de saber de los alumnos en tanto las alternativas que se presentan toman en cuenta la diferencia de funcionamiento entre la numeración hablada, que se caracteriza por transparentar relaciones aditivas y/o multiplicativas y la numeración escrita (haciendo referencia al uso de los símbolos numéricos convencionales) que es posicional. En este sentido, esta actividad propuesta en primer año probablemente recogiera como respuestas mayoritarias la A y la B en tanto el apoyo en la numeración hablada y el conocimiento de los nudos (quinientos [500] y treinta [30]), podría dar como resultado la escritura 500304. Cuando el 34 ya está reconocido por el alumno como perteneciente a la familia de los treinta por ejemplo y sabe que se escribe con dos cifras, tal vez apareciera la representación como 50034.

Una modificación a realizar a este ítem es la de proponer un problema de forma que los alumnos deban justificar las razones por las que toman sus decisiones.

**Problema 2**

La maestra pidió a los alumnos que escribieran los siguientes números: cincuenta y ocho, cuatrocientos veintiocho y doscientos

Candela anotó: 58; 40028; 200     Joaquín anotó: 508; 400208; 200

¿Con quién estás de acuerdo? ¿Por qué?

En este caso, como en el problema anterior, los alumnos también tienen que identificar escrituras equivalentes del mismo número dadas en lenguaje natural y en su representación simbólica convencional pero además deben justificar las razones por las que realizan su opción. Algunos podrán defender la escritura de Joaquín basándose en que "el número te lo dice: cincuenta y ocho" y con esos mismos argumentos defender las escrituras tanto de Candela como de Joaquín del cuatrocientos veintiocho. Otros podrán apoyarse en el conocimiento del 58 como edad de algún familiar, como perteneciente a la familia de los cincuenti y por lo tanto representado con dos cifras, por la presencia en el aula de una grilla numérica o banda numérica donde pueda identificar la representación simbólica convencional. En este escenario, la puesta en común de las razones y la intervención del docente para contraponer los argumentos o poner en tensión las razones: ¿Cómo se escribe el cincuenta? ¿Y el sesenta?, son fundamentales para iniciar la reflexión respecto a la representación del cincuenta y ocho con dos cifras y no con tres. En el caso del 428, la ausencia de una opción correcta habilita promover la discusión entre los que tomen postura por Candela o por Joaquín como entre los que consideren que ninguno tiene razón. Disponer del conocimiento de la escritura del cuatrocientos y del quinientos como números de tres cifras puede resultar un argumento potente al momento de interponer el orden entre cuatrocientos, cuatrocientos veintiocho y quinientos para revisar las escrituras y tomar decisiones.

**Problema 3**

Arma las parejas para jugar al Memory

| | |
|---|---|
| Doscientos doce | …… |
| ……………………………. | 112 |
| Mil doscientos | …… |
| Dos mil dos | …… |
| ……………………………… | 2222 |

En este problema se presentan de forma literal números naturales de tres y cuatro cifras. Esta representación en lenguaje natural transparenta las relaciones aditivas y/o multiplicativas que caracterizan a la numeración hablada. Así, doscientos doce deja en evidencia las relaciones 2 x 100 + 12. El alumno tiene que identificar la escritura simbólica convencional.

En todos los problemas propuestos hasta el momento, lo que se pone en juego es la diferencia de funcionamiento entre el entorno oral o numeración "hablada" que es aditiva y/o multiplicativa y la numeración "escrita" que es posicional. Tal como lo evidencian las investigaciones que han profundizado en la adquisición del sistema de numeración por parte de los niños (Lerner y Sadovsky, 1994), estos obtienen información acerca de la escritura de los números basándose en la numeración hablada y en el conocimiento de la escritura convencional de los nudos (los que corresponden a los múltiplos de la base del sistema).

Algunos juegos que viven en las aulas del Primer Ciclo también se constituyen en escenario fértil que justifica y requiere la identificación y reconocimiento de números naturales. Veamos algunos problemas pensados para nivel inicial y primer año.

**Problema 4** - Juego de Lotería

**Materiales:**

- Cartones de lotería.
- Botones, piedritas, porotos.
- Bolsa o caja con tarjetas o bolillas con los números elegidos.

**Reglas de juego:**

- Un alumno por grupo va sacando tarjetas o bolillas y "canta" en voz alta el número que está escrito.
- Cada niño busca en su cartón y, si tiene el número cantado, lo marca con un botón.
- Gana el primero que completa su cartón.

Tanto en inicial como en primer año, el juego de lotería exige la interpretación de escrituras numéricas de una y dos cifras por parte de los alumnos en distintas circunstancias. Hay casos en los que corresponde al alumno o a los alumnos, pues al "cantar la bolilla" tienen que leer la escritura simbólica convencional del número y producirlo en forma literal, ya sea oral o escrita. Otra circunstancia corresponde a la de los alumnos que, al escuchar o leer la representación en lenguaje natural, deben interpretar el nombre del número y reconocerlo en los cartones en su representación simbólica convencional.

Si bien al principio puede ser el maestro el que ocupe el lugar del "cantor" y acompañar la lectura con la escritura simbólica convencional en la pizarra para que los alumnos la reconozcan en sus cartones, es potente pensar en las variantes a este juego. Estas dan la oportunidad, una vez que los alumnos dominan las reglas, para que la lectura y reconocimiento de números por parte de los alumnos adquiera un lugar relevante.

Una variante en primer año puede ser poner como condición que al “cantar una bolilla” el alumno tenga que nombrar el número (en el caso de los números de dos cifras) y no las cifras que lo componen. Si el alumno “cantor” no conoce el nombre, el maestro podrá intervenir promoviendo que el alumno se apoye en pistas: “¿A qué familia pertenece? ¿Es de la familia de los cuarenti o de los cincuenti?”. Otras intervenciones pueden consistir en presentar la escritura del nudo anterior como forma de que el alumno pueda recurrir, por ejemplo, a su conocimiento de la regularidad que aparece en la numeración hablada o a otros que tenga a disposición. Cabe destacar que esta posibilidad de apelar a las regularidades queda obturada si se trabaja exclusivamente con tramos pequeños de la serie numérica o exclusivamente con los dígitos.

## Problemas para producir escrituras equivalentes para un mismo número

Este perfil en el que se enfatiza la producción de números en el Primer Ciclo, supone que los alumnos sean capaces de realizar diferentes escrituras que representen el mismo número natural, es decir, escrituras equivalentes. Estas pueden presentarse en el mismo registro o en registros diferentes. Así, por ejemplo, 6 - 2; 2 x 2 o 1 + 1 + 2 son escrituras equivalentes del mismo número en el registro aritmético, en tanto “cuatro” es escritura equivalente del mismo número pero en un registro diferente (registro lenguaje natural).

**Problema 1** - El juego de bolos

En NI5 con experiencia en el juego de bolos y registro de puntajes, el docente presenta la siguiente tabla:

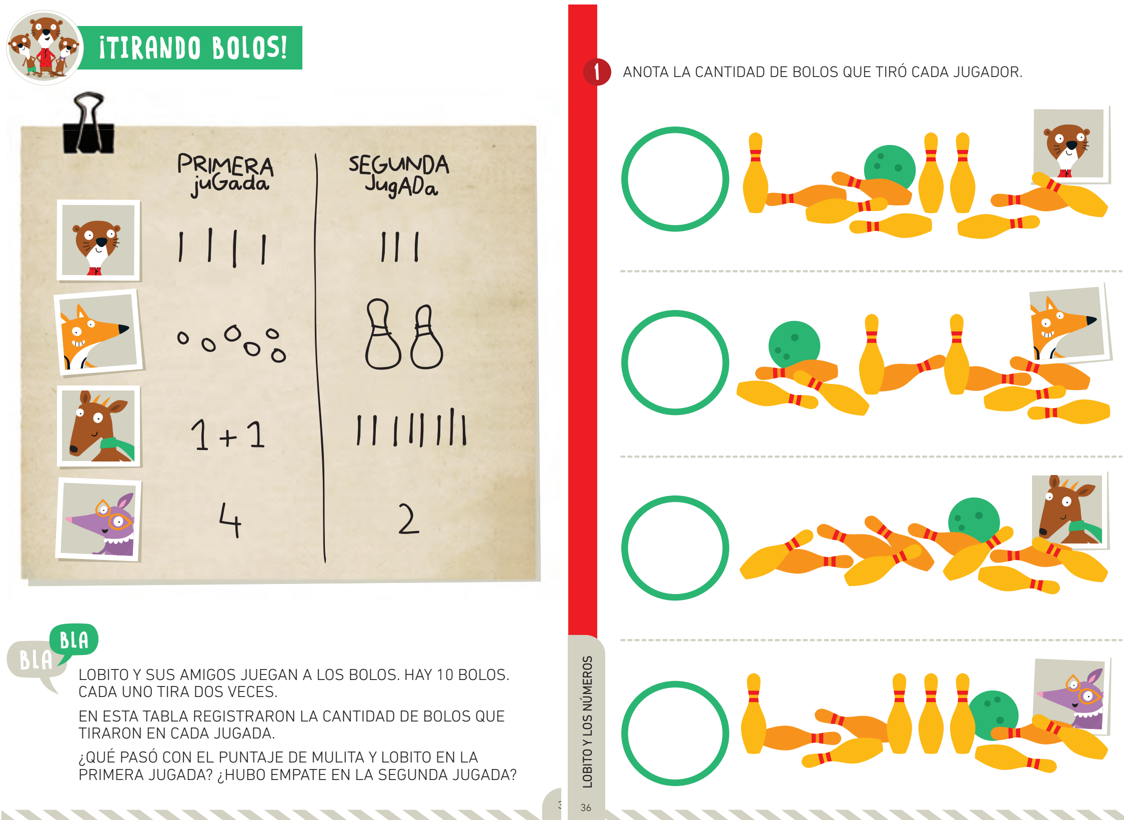
| | **Primera tirada** | **Segunda tirada** |
|---|---|---|
| Candela | III | 2 |
| Catalina | 4 |  |
| Paula | 4 y 1 | 2 |
| Lucía | | 3 |

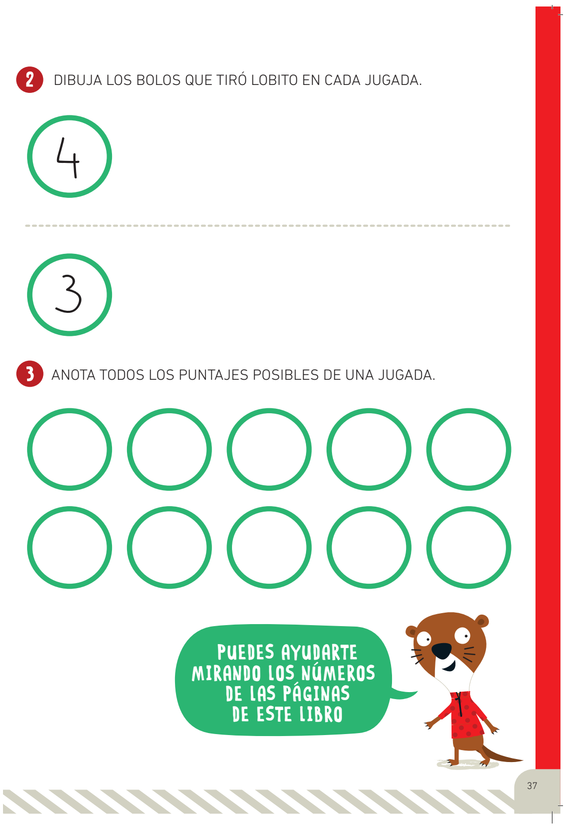
A partir de ella, el docente propone como consigna oral: *Sandra dice que Lucía y Candela empataron. Anota la primera tirada de Lucía.*

En este problema, para dar respuesta, los alumnos tienen que interpretar las distintas representaciones, poner en juego sus conocimientos y buscar una escritura equivalente al cinco representado como III y 2. Si bien para ello podrán utilizar distintas estrategias, la afirmación de la consigna obliga a centrar la atención en los registros de Candela y Lucía. Entre las respuestas posibles dependiendo de los registros disponibles por los alumnos podrán aparecer: 2, II, dos. Entre los argumentos para apoyar sus respuestas podrán estar: *“Porque las dos sacaron cinco puntos”, “Porque este III de Candela es el mismo que este ‘3’”.* En los dos casos, las respuestas evidencian el reconocimiento de escrituras equivalentes del mismo número III y 2; 2 y 3; 5. Reconocida la equivalencia entre las escrituras en registros distintos (III y 3), la intervención del docente es relevante también al momento de focalizar la discusión en torno a otras equivalencias: III y 2; 2 y 3. La producción de escrituras equivalentes ocurre también con la solicitud a los alumnos de que escriban o anoten otras formas para empatar. Esta intervención incluye a las equivalencias entre III y 2; 2 y 3, las de 5; 4 y 1.

Se presentan a continuación problemas que pueden ser propuestos en NI5 en los cuales se trabaja la representación: producción e interpretación de números.

En primer y segundo año, además de ampliar el dominio numérico, se podrá incluir escrituras equivalentes en distintos o en el mismo registro:



**Problema 2** - ¿Cuántos números diferentes hay?

Cincuenta

25 + 25

500

12 x 10

120

10 + 10 + 30

200 - 80

200 : 4

ciento veinte

60 x 2

En este problema el alumno tiene que reconocer las escrituras equivalentes para el mismo número a través de distintas representaciones. Si bien el énfasis está puesto en la identificación de escrituras y para dar respuesta el alumno tiene que, o bien tener a disposición ciertos repertorio de cálculos o resolver los cálculos que se presentan en el cuadro, el objetivo de este problema es el trabajo con las escrituras equivalentes. Esto toma relevancia en el momento de la puesta en común en tanto espacio de enseñanza. El reconocimiento de las distintas representaciones de cada número se constituye en el punto de partida para una nueva consigna en la que los alumnos en duplas puedan producir otras escrituras equivalentes. Cabe destacar que el reconocimiento de los números en sus diferentes representaciones, además de ampliar la conceptualización, permite a los alumnos tener una cantidad de opciones al momento de tomar decisiones para emplear los números en distintas situaciones.

En todos los casos, la intervención docente es fundamental en la organización del espacio de discusión a fin de que los alumnos interpreten esas escrituras y acuerden luego la forma de justificar sus respuestas.

**Problema 3**

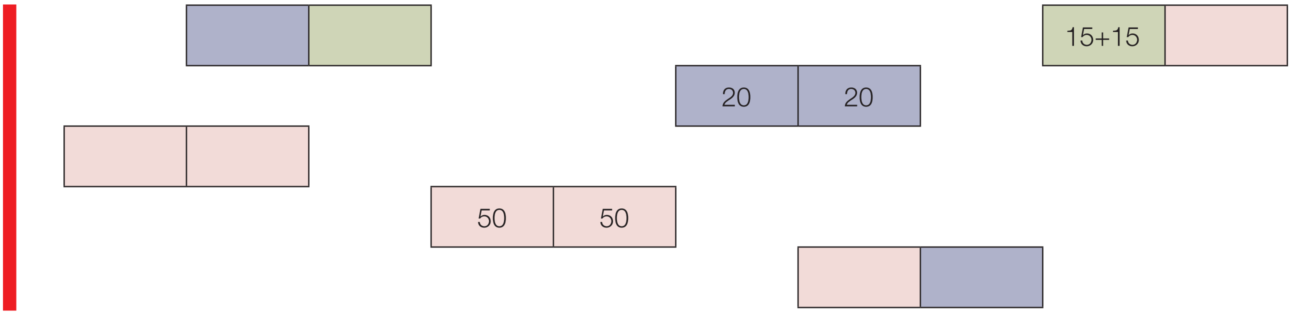
Arma las parejas para jugar al Memory

| | |
|---|---|
| Doscientos doce | ........... |
| .................... | 112 |
| Mil doscientos | ........... |
| Dos mil dos | ........... |
| ........... | 2222 |

Para pensar problemas para el abordaje de este perfil, el contexto lúdico y la evocación de los juegos vuelve a presentarse como contexto favorable para la producción de escrituras equivalentes en las clases de Primer Ciclo: juego de bolos, juegos de dados, juegos de cartas. Este problema es una variación del Problema 3 presentado en el perfil anterior. La variación hace que el énfasis recaiga en la producción de escrituras equivalentes en distintos registros.

**Problema 4**

Variantes al juego de dominó con fichas confeccionadas con el objetivo de que el alumno ponga en juego su conocimiento en relación a la producción de escrituras equivalentes del mismo número también se constituyen en una oportunidad potente para abordar este objetivo específico.




En este caso el alumno deberá completar las fichas de forma tal que los espacios del mismo color presenten escrituras equivalentes del mismo número: 15 + 15 con 30 o con 60 - 30; 15 x 2; etc.

Situaciones surgidas en el contexto cotidiano pueden habilitar la producción de escrituras equivalentes en distintos registros a través de juegos de simulación como por ejemplo completar recibos en los que se presenta la cantidad en lenguaje natural y el alumno debe producir la escritura equivalente en registro numérico.

El contexto matemático también se constituye en un escenario favorecedor para la producción de escrituras numéricas equivalentes en las clases del Primer Ciclo.

La consigna de escribir números “difíciles” o anotar números dictados por el maestro o por compañeros funciona como “chispa” que habilita a entablar discusiones muy potentes. A modo de ejemplo, en un segundo o tercer año el dictado del “tres mil cuatrocientos ocho” es el punto de inicio de producción de escrituras que será necesario analizar con los alumnos si son equivalentes a la dictada o no. La discusión, respecto a la equivalencia de las escrituras requerirá que los alumnos utilicen argumentos, se escuchen, vuelvan sobre sus producciones, vean desde otra perspectiva, revisen sus ideas. Actividades en las que la comunicación y la argumentación cobran un lugar relevante abonan que los alumnos, además de usar o emplear sus conocimientos, comiencen a participar en instancias propias del trabajo matemático: explicitar razones, buscar argumentos para defender un punto de vista y poder modificarlo en caso que sea pertinente.

Los problemas analizados para estos perfiles se constituyen en una oportunidad para avanzar en la producción e identificación de las representaciones numéricas de distinta cantidad de cifras en ambos entornos, oral y escrito.

## c. Las regularidades del Sistema de Numeración Decimal

### ¿A qué llamamos regularidades de la serie numérica?

Cuando se habla de “reconocer regularidades del SND” se hace referencia a aquellas reglas del sistema que rigen su funcionamiento. Ellas son:

- la existencia de símbolos numéricos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9;
- la presencia de agrupamientos regulares en donde cada orden implica 10 unidades del orden numérico anterior;
- el valor posicional de las cifras.

Reconocer las regularidades se constituye en un conocimiento importante para el niño. El alumno accede a través de situaciones de enseñanza, en las que él es quién elabora esas reglas, las reconstruye, las relaciona y, de esa manera, explora este sistema de representación matemático.

En este caso, se focaliza el trabajo con regularidades (reglas) de la serie numérica que se constituye por una sucesión de números integrados por un número limitado de cifras diferentes (10). Con ellas es posible escribir cualquier número.

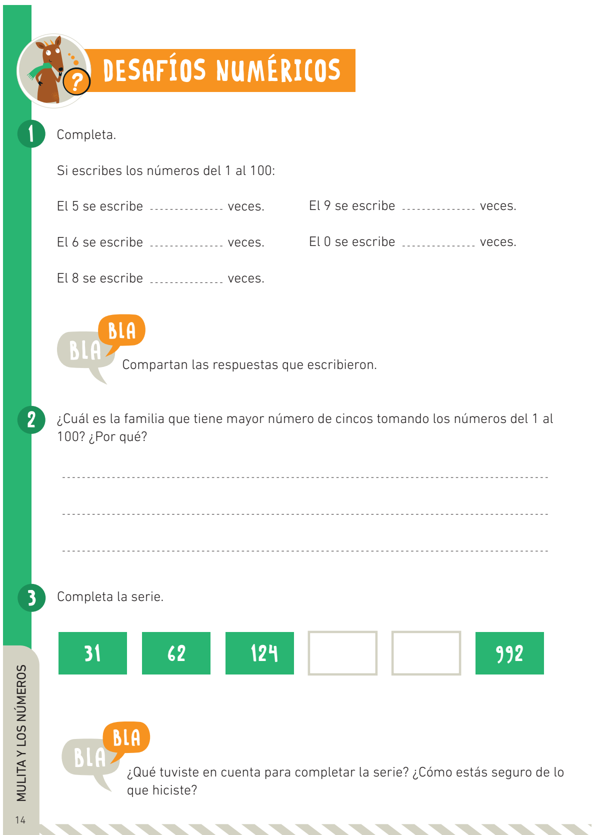
Cada número es parte de una serie ordenada, que posee una regularidad tal que habilita a anticipar el que precede o sigue de cualquier número

### ¿Qué problemas proponer?

A continuación, se presenta una familia de problemas que pretende establecer pautas orientadoras para el trabajo en segundo y tercer año. Estas actividades podrán integrar una secuencia de enseñanza cuyo objetivo sea abordar el trabajo con regularidades de la serie numérica.

## Problemas para descubrir regularidades

**Problema 1**


DESAFÍOS NUMÉRICOS

1 Completa.

Si escribes los números del 1 al 100:

El 5 se escribe .............. veces. El 9 se escribe .............. veces.

El 6 se escribe .............. veces. El 0 se escribe .............. veces.

El 8 se escribe .............. veces.

BLA BLA Compartan las respuestas que escribieron.

2 ¿Cuál es la familia que tiene mayor número de cincos tomando los números del 1 al 100? ¿Por qué?

...........................................................................

...........................................................................

...........................................................................

3 Completa la serie.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 31 | 62 | 124 | | | 992 |

BLA BLA ¿Qué tuviste en cuenta para completar la serie? ¿Cómo estás seguro de lo que hiciste?

MULITA Y LOS NÚMEROS 14

En este problema, pensado para segundo o tercer año, el alumno debe contar las veces que aparece el 5 en los números del 1 al 100. El conteo de la cantidad de cincos es la estrategia que permite resolver la situación. El contenido a relevar es la regularidad de la serie. En este tipo de situaciones, el conteo y el estudio de una regularidad se vinculan en forma subsidiaria en una relación de estrategia-contenido a enseñar.

En función de sus conocimientos, algunos alumnos escribirán todos los números hasta el cien y luego contarán los cincos. Otros podrán recurrir a la serie oral y decir la serie registrando cada vez que nombran ¡cinco! Es posible que algún niño solo pronuncie los números con cinco y diga: cinco, quince, veinticinco… llevando control de cada cinco identificado. Algunos podrán decir: *“en la familia del 10 hay uno, en la del veinte uno, en la del treinta uno”*… totalizando la cantidad de veinte cincos evocados. En esta variedad de procedimientos de resolución es posible categorizar los que despliegan toda la serie numérica de 1 en 1, de 5 en 5 o por decena.

En el caso de los alumnos que recurren a resolver mediante el recitado de la serie, es posible no considerar el 5 del quince y tal vez no identificar todos los cincos de la familia de los "*cincuenti*" que no “suenan” como 5. El planteo de algunas preguntas puede ayudar al reconocimiento de esta regularidad: ¿Cuál es la familia que tiene mayor número de cincos? ¿Por qué? Una intervención que puede realizarse a fin de lograr avanzar a partir de este error, sería la de solicitar que identifiquen, primero, los 5 ligados a las unidades –5, 15, 25, 35, 45– y luego los que figuran en las decenas –50, 51, 52, 53, 54, 56, 57, 58, 59–, en el caso del 55, en ambos órdenes.

Este problema, focaliza la regularidad de las cifras en la integración de números. Habilita a predecir cuál es el número que sigue en la serie. *"Para ubicar los que tienen cinco, fijate que vienen después de un número que termina en 4 o antes de uno que tiene un 6".* También, al introducir la comparación con el 8, el 9 y el 6, se favorece la producción de ciertas generalizaciones que surgen a partir de la regularidad detectada: *"entre el 1 y el 100, todas las cifras se repiten el mismo número de veces".* Podemos afirmar que el 5 aparece 20 veces; 9 veces por cada familia sin contar la del cincuenta y 11 veces en la familia del cincuenti. ¿Todas las cifras se repiten 20 veces en la serie del 1 al 100? ¿Coincide la cantidad de veces al comparar con otras cifras? ¿Cuántas veces se repite el 6, el 8 o el 9? ¿Por qué? ¿Y el cero?

Introducir el cero en este problema, tiene una clara intencionalidad didáctica. Los alumnos pueden pensar, en una situación *a priori* que, como todas las cifras, el cero se repite 20 veces. Trabajar con ellos desde "lo anticipado y lo obtenido" (Sadovsky, 2005) permitirá establecer el dominio de validez de una regla construida por el grupo: *"Todas las cifras se repiten 20 veces desde el 1 hasta el 100, menos el cero"*. El alumno profundiza sobre la regla pues conoce aquellas situaciones en las que se cumple y aquellas otras en las que no lo hace. Estos cuestionamientos son oportunidades que se ofrecen para establecer nuevas relaciones numéricas y para favorecer la comunicación de esos conocimientos más avanzados. Como afirma Brousseau (1983):

> El sentido de un conocimiento matemático se define: no solo por la colección de situaciones donde este conocimiento es realizado como teoría matemática; no solo por la colección de situaciones donde el sujeto lo ha encontrado como medio de solución, sino también por el conjunto de concepciones que rechaza, de errores que evita, de economías que procura, de formulaciones que retoma, etc.

El problema es sencillo y, tal como anticipamos, es posible que todos los niños de tercer año puedan resolverlo por diferentes caminos. Pero ¿dónde está realmente el problema? El desafío lo introduce el maestro en la puesta en común. Es ese espacio público el que nos habilita a instaurar la duda –¿todas las cifras se repiten 20 veces?– frente a la formulación de conjeturas –*"yo creo que todas menos el uno porque si incluís el 100 hay 21"*, *"todas se repiten el mismo número de veces"*– introduciendo la posibilidad de transformar un posible "ejercicio" en un verdadero problema matemático que permite comunicar una regularidad –*"los 5, 6, 8 y 9 se repiten 20 veces"*– ampliarla –*"todas las cifras mantienen esa regularidad"*–y precisarla estableciendo un dominio de validez –*"todas, menos el cero"*, *"si incluimos el 100, el 1 sale de la regla"*–.

**Problema 2**

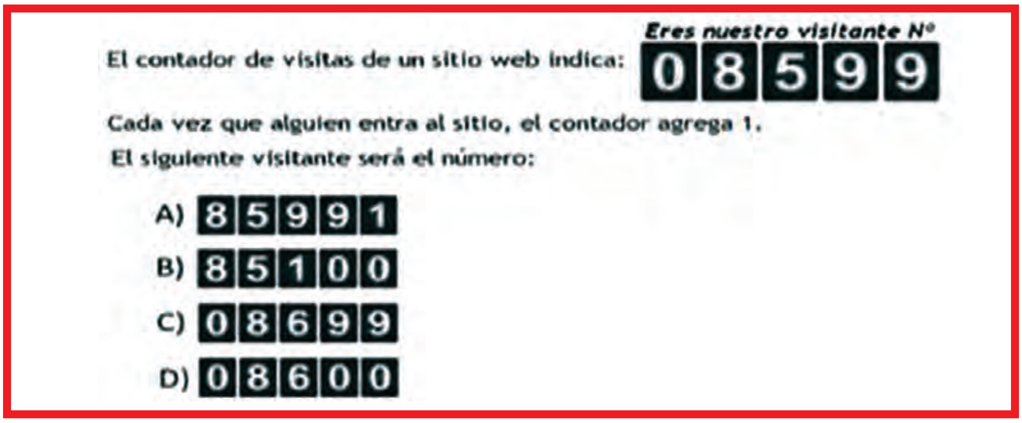
¿Cuántos números de una cifra hay? ¿Cuántos números de dos cifras? ¿Y de tres cifras?

*Actividad adaptada extraída de archivos de PAEPU (Cursos de Formación en Servicio, 2010)*

Este problema, también planteado en un contexto intramatemático, introduce otro aspecto que es la presencia de números de una cifra, de dos y de tres cifras. Los alumnos podrán acordar que los cienes van con tres cifras, los miles con cuatro, los diez mil con cinco; sin identificar aún que cada cifra representa un orden numérico que corresponde a una potencia de la base.

Es importante destacar la necesidad de no brindar al alumno portadores numéricos (tablas, cuadros) que permitan marcar esas cifras y contar. La ausencia de los mismos "obliga" al alumno a evocar la serie, a escribirla, a armar tal vez su tabla.

**Problema 3** - Contador Web



El contador de visitas de un sitio web indica: Eres nuestro visitante N° 08599

Cada vez que alguien entra al sitio, el contador agrega 1.
El siguiente visitante será el número:

A) 85991
B) 85100
C) 08699
D) 08600

*Actividad extraída de la Evaluación en línea (2016)*

Este problema requiere identificar el siguiente de un natural justamente en una situación de cambio de orden numérico. Agregar "1" implica hallar el siguiente de ese número, es decir, el número que se ubica inmediatamente en la serie numérica. "*Al aumentar en uno a los números terminados en un 9, siempre en la unidad aparece el cero*". "*Si termina en dos nueves, el siguiente será un número con dos ceros*". Con estas afirmaciones aún no es posible resolver el problema planteado. Las opciones B) y D) ofrecen números terminados en doble cero. Saber que después del 599 viene el 600 puede constituirse en punto de apoyo –conocimiento de las regularidades de la serie– para la resolución de la situación. El cambio de centena es factor decisivo para discernir entre las opciones mencionadas –B y D–.

Este problema, planteado como una situación de evaluación, puede ser retroalimentado con otros, tal como el problema 4 que se propone a continuación, en el que se apunta a reflexionar sobre la regularidad en el cambio de orden numérico.

**Problema 4** - Verdadero o falso

1- Después de un número terminado en nueve viene un número terminado en cero.

2- No existe ningún número terminado en 99 que tenga como número siguiente el 400.

## Problemas con tablas

Los problemas con tablas numéricas abonan también al trabajo con representaciones pues la producción e interpretación de escrituras tiene presencia en el abordaje de todos los aspectos de la numeración. En este caso, el foco está puesto en la detección de regularidades.

## Problema 1

La tabla que se muestra a continuación se encuentra incompleta. Complétala.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 500 | 505 | 510 | 515 | 520 | 525 | 530 | 535 | 540 | 545 |
| 550 | 555 | 560 | 565 | 570 | 575 | 580 | 585 | 590 | 595 |
| 600 | 605 | 610 | 615 | 620 | | | | | |
| 650 | 655 | | | | 675 | | | | |
| 700 | | | | | | | 785 | | |
| 750 | | | | | | | | | |
| 800 | | | 815 | | | | | | |
| | | | | | | | | | 945 |
| 900 | | | | 970 | | | | | |
| 950 | | | | | | | | | |

En la puesta en común, es posible presentar una serie de interrogantes: ¿Qué números escribieron en las celdas pintadas de celeste? ¿Cómo se dieron cuenta? ¿Qué pistas los ayudaron? ¿Qué sucedió con los números ubicados en las celdas pintadas de amarillo? ¿Por qué hay columnas con números terminados en cinco y otras con números terminados en cero? ¿Podría armarse una tabla en la cual alguna de las columnas combinara números que terminen en cero y en cinco? Si es así, ¿en cuál estaríamos pensando?

## Problema 1.1

¿Qué sucede con esta otra tabla? A pesar de que las tablas son diferentes, es posible encontrar semejanzas entre ésta y la anterior. ¿Por qué?

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 200 | 210 | 220 | 230 | 240 |
| 250 | 260 | 270 | 280 | 290 |
| 300 | 310 | 320 | | |
| 350 | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| 500 | | | | |

*Actividad extraída y adaptada del portal Uruguay Educa*

Si observamos las filas de esta segunda tabla los números van de 10 en 10 –200, 210, 220, 230, 240–y hay 5 columnas. Si nos centramos en las columnas los números van de 50 en 50 –200, 250, 300, 350–. Nos preguntamos: ¿Es posible construir una tabla que avance de dos en dos y que empezando por 200 tenga los mismos números de la primera columna que se observa en esta grilla? ¿Cuántas columnas debería tener esa tabla?

A través de la utilización de estas tablas de números –diccionarios numéricos– según los denomina María Emilia Quaranta, es posible trabajar con un dominio numérico amplio en el que pueden figurar números conocidos y otros que aún se desconocen.

El trabajo con la tabla se puede comenzar en un contexto lúdico. Jugar a “adivinar” los números que no están escritos, a encontrar los erróneos, a identificar características comunes entre los números mayores a 500 y menores que 990, entre los que terminan en cuatro, etc.

Como en los problemas anteriores, la puesta en común es fundamental para llegar a la explicitación, construida por los alumnos, de regularidades detectadas: *“los números de la primera columna terminan en cero, los de la segunda en cero y así sucesivamente porque la serie cumple una regla: va de 10 en 10 a partir del 200”.*

Esta regla, elaborada y ajustada por los alumnos, es producto de un trabajo que difiere mucho de aquel emanado de algunas prácticas habituales en las que es el docente quien redacta la regularidad y la clase se limita a copiar el enunciado. Apostamos por este camino inductivo, de producción personal y social, en donde se ensaya, se corrige, se comunica un conocimiento matemático considerado en su provisoriedad.

Otro problema, en relación a este mismo soporte, es el que habilita trabajar con tramos de la tabla pensando en completar huecos. Si bien esta actividad puede ser adecuada para representaciones también es útil para identificar regularidades. El alumno escribe los números acorde a la regularidad de la columna o de la fila.

Luego de algunas de estas actividades es necesario descontextualizar progresivamente las nociones matemáticas relacionadas al soporte (tabla) para que las relaciones numéricas se vinculen a los números mismos y el alumno pueda pensar en propiedades del sistema: “si contamos de 10 en 10 desde un nudo los números van a terminar todos en cero”. Se podría dejar planteada una nueva interrogante: ¿Y si contamos de 10 en 10 a partir de un número terminado en 9? ¿Cómo continúa la serie? ¿Y si terminara en 4?

Muchos de los problemas propuestos son posibles de realizar en inicial, primero y segundo año introduciendo algunas modificaciones que hacen al manejo de variables didácticas. Acotar el dominio numérico elegido, presentar cambios en las preguntas que se plantean son opciones didácticas que habilitan una adecuación a los grados mencionados y permitirían integrar a aquellos niños de tercero que no han logrado entrar en tarea.

La secuencia de ciclo tiene como punto de partida, desde inicial, el trabajo con las "regularidades de la serie numérica oral". Para ello, es importante abarcar un rango que posibilite la comparación –intervalos entre decenas–: *“después del veinte viene el veintiuno, del treinta el treinta y uno y así seguís”*. También es posible relacionar el entorno oral con regularidades de la numeración escrita: *“Los dieces se escriben con uno, los cincuenta con cinco”*.

En primero y segundo, el contexto matemático nos habilita, además, a explorar relaciones y plantear, por ejemplo, algunos de estos interrogantes:

- ¿Cuáles son los números que faltan en esta tabla? ¿Qué te ayudó a encontrarlos?

| | | |
|---|---|---|
| 13 | 14 | 15 |
| 23 | 24 | |
| | 34 | |

El problema sobre el “Contador Web”, que comentábamos para tercero, puede modificarse y hacer referencia a un número menor acorde al dominio numérico trabajado en el grado –por ejemplo 19–, manteniendo la dificultad de cambio de orden numérico pero focalizado en la decena.

¿Cómo sistematizar lo que van aprendiendo?

La progresión en el desarrollo de este contenido requiere de instancias de reflexión y análisis del camino recorrido. ¿Qué hemos aprendido sobre los números? ¿Cómo sabemos qué número viene después del 4, o del 14, o del 24?

¿Qué tienen de parecido los números del 20 al 30? ¿Y los del 30 al 40? De esta manera, se irán generando sucesivos "ajustes" originados en espacios de discusión, intercambio de ideas con el otro, que posibilitarán la comunicación del estado de los saberes del alumno.

El contenido matemático focalizado es la serie numérica oral y escrita. A lo largo del ciclo es posible analizar los números que la componen y su relación con el Sistema de Numeración Decimal.

Lerner y Sadovsky (1994) plantean un recorrido didáctico cuyo punto de partida implica el uso de los números, la búsqueda de regularidades y la reflexión sobre ellos; enfatizando, más allá del planteo de buenas situaciones, la necesidad de una intervención docente adecuada que posibilite la realización de diferentes acercamientos a este objeto de conocimiento.

## d. La composición y descomposición de números naturales

### ¿Cómo se pueden componer y descomponer los números naturales?

La composición y descomposición tanto aditiva como multiplicativa es otro de los aspectos de la numeración a abordar a lo largo del ciclo escolar. Habitualmente, para números de dos y más cifras se proponen de preferencia la composición aditiva a partir de decenas y la descomposición como la suma de un múltiplo de 10 y el dígito correspondiente. Estas formas de descomponer los números son potentes en tanto se apoyan en el conocimiento de la estructura del SND y le aportan al alumno otros elementos para la comprensión del funcionamiento del sistema. Sin embargo, desde los primeros grados es necesario también proponer problemas en los que los alumnos puedan recurrir a distintas escrituras equivalentes de los números: producir o interpretar el 7 como 2 + 3 + 2 o 4 y 3 o 5 + 2 por ejemplo, o el 20 como 10 + 10 pero también como 2 x 10 o 5 x 4.

Como ha quedado en evidencia en los otros problemas analizados, existe una estrecha relación entre los distintos aspectos de la numeración natural. En este caso, esta relación queda establecida con el perfil correspondiente al aspecto "representaciones": producir escrituras equivalentes para un mismo número. En este sentido, una cuestión fundamental a tener presente al momento de la planificación del abordaje de este aspecto es lo que plantea Rodríguez Rava (2009) cuando afirma:

> Al planificar el trabajo con composiciones y descomposiciones se debe tener en cuenta que estas no tienen un fin en sí mismo sino que favorecen el conocimiento de la numeración, facilitan el conteo, sirven para ordenar números y enriquecen las estrategias de cálculo.

### ¿Qué problemas proponer?

Centrándonos en el Primer Ciclo, las situaciones en las que se emplean dados, cartas o tarjetas como soporte, permiten que los alumnos compongan de diferentes formas un mismo número. Se pone en evidencia, además, la relación de la composición y descomposición con el aspecto *representaciones* así como el estrecho vínculo que tiene con el cálculo mental al favorecer la conformación de repertorio de cálculos.

## Problemas para componer y descomponer números

### Problema 1

DOS VECES EL MISMO

MATERIALES

- DOS DADOS CONVENCIONALES
- UNA TABLA COMO LA SIGUIENTE PARA CADA JUGADOR

REGLAS DE JUEGO

ENTRE 2 Y 5 JUGADORES

POR TURNOS, CADA JUGADOR TIRA LOS DOS DADOS JUNTOS. EN SU TABLA, ANOTA EN LA PRIMERA COLUMNA CUÁNTOS PUNTOS SACÓ EN TOTAL Y EN LA SEGUNDA COLUMNA LO QUE SALIÓ EN CADA DADO.

GANA EL QUE LOGRA REPETIR DOS VECES EL MISMO TOTAL.

| TOTAL | DADO 1 | DADO 2 |
|---|---|---|
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |

BLA BLA

COMPARTE TU TABLA CON LOS AMIGOS DE TU MESA.
¿TODOS LA COMPLETARON DE LA MISMA MANERA?

LOBITO Y LOS NÚMEROS

38

Este problema que se origina en un contexto lúdico obliga a escribir diferentes descomposiciones de números naturales mayores que 1 y menores que 13 y luego identificarlas como escrituras equivalentes del mismo número. Dependiendo del conocimiento de los alumnos en relación a los números en juego, emplearán variadas representaciones: dibujarán los dados, utilizarán otras marcas icónicas, apelarán a representaciones simbólicas convencionales y pondrán en juego distintas formas de resolución para saber cuántos puntos sacaron. Una vez más, la gestión que el docente realiza de la actividad será la promotora de avances en relación a la composición y descomposición. Se deberán registrar las descomposiciones que surjan de los ganadores como forma de guardar memoria para próximas instancias de juego. Una vez que el juego haya sido llevado a cabo por los alumnos en varias oportunidades, el docente promoverá la reflexión y el análisis respecto a qué números nunca van a poder formarse con dos dados: 0, 1 y los mayores que 12.

Entre las fortalezas que tiene esta propuesta es que permite “despegar” la composición y la descomposición de la base del sistema que en general tiene mucha presencia en las aulas (24 = 10 + 10 + 4; 105 = 100 + 5). Si bien se reconoce el lugar relevante que estas composiciones y descomposiciones tienen en la conceptualización del SND, ampliar las posibilidades de componer y descomponer los números enriquece la conceptualización del número y otorga al alumno más posibilidades de disponer de otras opciones a las que recurrir al momento de tener que utilizar el número en otras situaciones.

También se podrá variar el juego utilizando dados con representaciones simbólicas de los números o combinando un dado con constelaciones y otro con representaciones simbólicas.

En primer año se podrán utilizar los “nudos” del 10 al 60 y de esa manera abordar las descomposiciones del 20 al 120. Una variante a esta propuesta puede ser la de solicitar que anticipen qué números se podrán componer si uno de los dados que sale es 10, 20, 40, etc.

Otra variante puede ser de la incorporación de otro dado:

Alina y Manuel jugaron a "Los dados" y Alina ganó. Completa el cartón de Alina:

| Total | DADOS | | |
|---|---|---|---|
| | 5 | 4 | 5 |
| | 2 | 5 | 4 |
| | 4 | 6 | 6 |
| 9 | | | 5 |
| | 2 | 6 | 3 |
| | 3 | 6 | 3 |

En segundo o tercer año se podrán variar las reglas de juego y focalizar en las composiciones y descomposiciones multiplicativas: tirar los dos dados, anotar en la primera columna el producto y en la segunda los "dados" que generaron ese producto. Gana el que obtenga tres veces el mismo producto. Otra variante de esta puede ser la de combinar los dados utilizando uno con los nudos y otro convencional, manteniendo siempre la multiplicación.

Promover instancias de intercambio en las que poner como objeto de análisis las composiciones y descomposiciones aditivas y multiplicativas permite identificar, en el intervalo decidido, los números que pueden componerse y descomponerse de distintas formas y cuáles tienen una sola manera.

Otras actividades en las que se aborda este aspecto de la numeración, también en contexto lúdico, son aquellas que se proponen con cartas como "la escoba del 10", "la escoba del 15". Las decisiones del maestro en relación a las representaciones que presenta en las cartas, serán variaciones a la actividad.

**Problema 2**

En el álbum de animales de la clase tenemos que pegar 16 figuritas de animales autóctonos en tres páginas

¿Cómo podemos pegarlas?

En primer año, resolver el problema 2 exige como estrategia la composición y descomposición aditiva del 16. En este caso es el alumno el que tiene que decidir qué números –cuántas figuritas– utiliza para componer otro. Esta situación además de tener varias soluciones posibles, aspecto que será imprescindible poner a discusión con los alumnos para focalizar en las distintas descomposiciones del 16, habilita que la validación esté a cargo del alumno.

Luego de este problema se pueden proponer:

**Problema 2.1**

En el álbum de animales de la clase tenemos que pegar 16 figuritas de animales autóctonos en tres páginas.

Paula dice que puede pegar 3 en una página, 5 en otra y 7 en otra. ¿Estás de acuerdo?

**Problema 2.2**

En el álbum de animales de la clase tenemos que pegar 16 figuritas de animales autóctonos en tres páginas.

Iván dice que puede pegar 5, 5, y 6.

Carmela dice que ella pegará 6, 8 y 2.

Isabel dice que pegará 4,5, y 7.

¿Quién tiene razón? ¿Por qué?

Esta familia de problemas aborda el mismo contenido matemático: composición y descomposición aditiva del 16. Sin embargo, cada problema exige por parte del alumno cuestiones diferentes. En el problema 2 el alumno tiene que generar escrituras equivalentes del 16 a través de la descomposición aditiva. La presentación de las variadas "soluciones" encontradas por los distintos alumnos permite guardar registro de esas escrituras y buscar otras que no hayan surgido. ¿Y si en lugar de tres páginas tuviéramos cuatro? ¿Y si en lugar de 16 figuritas fueran 20? Las preguntas que el docente incorpora producen nuevas situaciones sobre las que seguir pensando. En el segundo problema el alumno tiene que componer el número a partir de 3, 5 y 7 para luego contrastar con el número de figuritas dado y decidir si la solución propuesta es correcta o no. La fundamentación de las respuestas: *"No, porque da 15", "15 es menos que 16", "Le falta una figurita", "No llega a 16", "Le queda una figurita sin pegar"* permite promover discusiones acerca de los puntos en contacto entre las razones que dan los alumnos y poner el foco en cómo solucionarlo. En el tercer problema el alumno tiene que componer aditivamente a partir de las descomposiciones presentadas para poder dar una respuesta y fundamentarla.

La variación del contexto y del dominio numérico son algunas de las modificaciones a realizar para lograr una variedad de problemas para abordar la composición y descomposición aditiva y multiplicativa en los primeros grados.

**Problema 3**

En el festival de la Escuela se recaudaron $5300 y se cambiaron todas las monedas en billetes.

a) ¿Cómo se compone esta cantidad con la menor cantidad de billetes de $1000 y de $100?

b) ¿Y con la menor cantidad de billetes de $500 y $100?

c) ¿Y solo con billetes de $100?

En tercer año este tipo de situaciones requiere que el alumno descomponga cantidades y de esta forma produzca escrituras equivalentes. La decisión de establecer la condición de que sea a través de la "menor cantidad de billetes" y de presentar los billetes, restringe las posibilidades de las descomposiciones multiplicativas y aditivas a realizar. Otra variante a partir de un problema en el mismo contexto puede consistir en ofrecer distintas opciones entre las que los alumnos tengan que optar, como se plantea a continuación.

**Problema 4**

En el recreo se recaudaron $720 y se cambiaron todas las monedas en billetes.

Elije la opción que corresponde a la recaudación en el recreo:

- 5 billetes de 100, 4 billetes de $50 y 2 billetes de $20.
- 3 billetes de $200, 5 billetes de $20.
- 5 billetes de 100, 2 billetes de $50 y 6 billetes de $20.

A diferencia del problema anterior, en este caso las descomposiciones están dadas y el alumno tiene que componer multiplicativa y aditivamente o solo aditivamente –dependiendo de los conocimientos, repertorio de cálculos que tenga disponibles– para responder.

La relación entre la composición y descomposición con los demás aspectos de la numeración tiene también estrecho vínculo con el cálculo. De hecho, como afirma Pazos (2008):

> Promover en los alumnos la idea de que un número puede representarse de diferentes formas como consecuencia de las distintas descomposiciones posibles, facilitará el uso de estas estrategias para el cálculo mental, en el cual los niños podrán apelar a las descomposiciones que crean más convenientes para resolver en forma más económica el cálculo al que se enfrentan.

## e. El valor posicional de las cifras

### ¿De qué hablamos cuando nos referimos al valor posicional de las cifras?

El SND se caracteriza por ser posicional. Esto habilita a producir números diversos e infinitos articulando diez cifras que tienen un valor absoluto y también un valor relativo según la posición que ocupan en el número. Cada orden numérico, ubicado en forma ascendente de derecha a izquierda, representa una potencia de 10, $10_0$, $10_1$, $10_2$,$10_3$ […]. Las unidades menores están incluidas en las mayores, implican relaciones de inclusión y agrupamiento y que tal vez no resultan evidentes. Sin embargo, la intervención docente resulta sustantiva para ayudar al alumno a comprender aspectos constitutivos del valor posicional, propiedad que hace a la economía de nuestro sistema de representación pues con pocas cifras es posible escribir "todos" los números y que, a veces, se considera en forma superficial trabajando únicamente el valor y el nombre de cada lugar.

Desde el nivel inicial, los niños construyen hipótesis que les permiten comparar números *"El primero es el que manda", "A mayor cantidad de cifras mayor es el número"*. Estas ideas, que no son objeto de enseñanza, se constituyen en puntos de partida cuando es el propio niño quien las formula. Sin embargo, aún esos niños están lejos de sospechar que la cantidad de cifras del número hace referencia, en el conjunto de los naturales, a la cantidad de veces que se ha agrupado en base 10.

### ¿Qué problemas proponer?

Se pretende trabajar, a través de una familia de problemas, esta propiedad del sistema de notación por demás compleja que habilita un conocimiento profundo del funcionamiento del SND. Interesa generar la reflexión sobre prácticas habituales que plantean la descomposición numérica *per se* formando parte de ejercicios de repetición donde el alumno apoya sus estrategias de resolución en aspectos visuales: *"en cada flecha hay que agregar un cero más", "en los palitos del ábaco hay que poner los aros que dice cada cifra"*, sin generar relaciones numéricas que habiliten la comprensión de esta propiedad (VP). Kamii (1975) hace referencia a ejercicios de “truco o magia” que generan respuestas mecanizadas por parte del alumno y que no contribuyen al desarrollo de nociones numéricas.

## Problemas para interpretar el valor posicional de las cifras

**Problema 1**

Con 4567 tornillos quiero armar cajas de 10. ¿Cuántas cajas es posible formar? ¿Cuántos tornillos sobran?

*Actividad extraída de archivos de PAEPU (Curso II, Matemática, 2012)*

**Problema 2**

¿Y si con 4567 tornillos, armamos cajas de 100 tornillos? ¿Cuántas? ¿Sobran tornillos? ¿Cuántos?

**Problema 3**

En la ferretería con 4567 tornillos, arman cajas de 1000 tornillos. ¿Cuántas cajas se forman? Sobran  tornillos.

**Problema 4**

¿Y si fueran 5000 tornillos? ¿Cuántas cajas de 10 tornillos podríamos armar? ¿Y de 1000?

Los problemas presentados pensados para tercer año exigen formar grupos de 10, 100 y 1000 tornillos. El alumno, en interacción con cada problema, puede acudir a la división entre 10, entre 100 y 1000 como estrategia experta o bien pensar en números que multiplicados por diez (456), cien (45) o mil (4) den un total cercano y menor a 4.670. La propuesta permite que sea el propio alumno quien compruebe la validez de sus respuestas: “*si multiplico 4 por 1000 son 4 cajas de 1000 tornillos y sobran 567*”. También podrá pensar en sumas sucesivas: “*si armo una caja van 1000 tornillos, 2 cajas 2000*”, etc.

Como ya se ha mencionado con anterioridad en el análisis de otros perfiles, para recuperar el conocimiento a enseñar, que se encuentra en forma intrínseca en la propuesta, es necesario gestionar una puesta en común donde el docente, desde su intencionalidad didáctica, ponga de manifiesto las nociones activadas en el alumno, en relación al valor posicional. Por ejemplo, cuestionar: ¿Es posible resolver esta situación sin hacer cálculos? ¿Qué información da el número que podríamos utilizar a la hora de resolver?

Este análisis abre la posibilidad de abordar el valor posicional de cada cifra entendido como el valor relativo de la cifra –el 4, en el 4567 representa un valor de 4000 unidades. Esta es una propiedad muy trabajada en la escuela pero que, en general, no es muy comprendida por los niños. Por el contrario, resulta para ellos poco creíble que el valor de una cifra dependa de su posición.

También, el problema habilita a analizar la agrupación de unidades simples –en 400 decenas, 40 centenas, 4 unidades de mil– en forma regular manteniendo relaciones de inclusión entre los órdenes numéricos. Esas 4 unidades de mil incluyen 40 centenas, 400 decenas, 4000 unidades. Volviendo al problema de referencia nos cuestionamos: en 4 cajas de 1.000, ¿cuántos tornillos entran? ¿Y en 40 cajas de 100 tornillos? Todas estas preguntas, otras que son posibles de generar y sus respuestas hacen referencia al mismo objeto de análisis –cuántas unidades forman decenas, centenas, millares–. También podemos promover respuestas y explicaciones trabajando con unidades distintas en órdenes diferentes –unidades en decenas, decenas integrando centenas, centenas en millares–.

La presentación de estos problemas secuenciados relaciona “tornillos agrupados en cajas de diez mil y la posibilidad de armar otras cajas de miles, cienes, dieces”. El contexto cotidiano brinda una oportunidad para acercarnos a la estructura del SND pensando en grupos de 10, 100, 1000 y 10000 unidades sin necesidad de plantear situaciones de lectura y escritura en potencias de 10, desafíos a los que se enfrentarán en grados posteriores.

Por otro lado, el número se analiza desde una doble mirada, desde los órdenes numéricos de mayor exponente ($10^5$, $10^4$…) y su relación con los anteriores: una decena de mil se forma con 10 millares, o 100 centenas, o 1000 decenas, o 10000 unidades; y desde los primeros órdenes hacia los posteriores: con “diez unos” formamos una decena, con 100 una centena, con 10 decenas una centena, y así sucesivamente representando dificultades nuevas y diferentes para los niños.

Tal como lo plantea Patricia Sadovsky (2005): “La intención didáctica no es patrimonio del problema sino de quien concibe un cierto escenario didáctico a partir del problema”, lo que nos lleva a revitalizar la puesta en común que potenciará la relación entre conocimientos matemáticos y su descontextualización. En este caso: transitamos desde la contextualización en cajas con 100 tornillos cada una hacia su descontextualización focalizando relaciones numéricas.

**Problema 1**

En el cuaderno de primero aparece una variante de este tipo de problemas:


UN NUEVO DESAFÍO

1 EN LA PANADERÍA QUIEREN ARMAR Y COMPLETAR CAJAS CON 10 GALLETAS. SE HORNEARON 24.

¿CUÁNTAS CAJAS ARMARON?

¿QUEDARON GALLETAS SIN EMPAQUETAR FUERA DE LAS CAJAS?

2 OTRO DÍA HORNEARON 35 GALLETAS.

¿CUÁNTAS CAJAS SE COMPLETAN Y CUÁNTAS GALLETAS SOBRAN?

49

En otro contexto otros posibles problemas son:

**Problema 1**

Para el fin de semana se hicieron 132 alfajores. Se ponen 10 por bolsa. ¿Cuántas bolsas se preparan?

**Problema 2**

A la escuela llegaron los nuevos libros de lectura. Son 325. Vienen en cajas de 10 libros cada una. ¿Cuántas cajas son? ¿Cuántos libros vienen sueltos?

**Problema 2.1**

Si los libros se empaquetan en cajas de 100: ¿Cuántas cajas se completan? ¿Y cuántas cajas de 10 libros es posible armar con los que sobran?

**Problema 2.2**

En otra escuela recibieron 30 cajas de 10 libros. ¿Cuántos libros es posible dar a los alumnos?

**Problema 2.3**


En este último problema la intención es que los alumnos compongan el 1308 con cienes, dieces, unos, miles. Es posible introducir el desafío de trabajar solo con monedas de un peso, de diez; con billetes de 100 y de 1000 de manera de brindar un apoyo como lo es el uso del sistema monetario para incursionar en esta regularidad del SND que es por demás compleja. Nos preguntamos: entonces ¿cuántas monedas de diez se necesitan para tener $138? ¿Qué información nos da el número? Kamii (1988, pág. 66) plantea que es diferente armar grupos de diez objetos y decir "3 decenas" en lugar de pensar una estructura jerárquica de inclusión numérica expresando que es 3 x 10. "Todo son técnicas o trucos que se enseñan […] bajo la ilusión de que así aprenden el valor de la posición" (*op. cit.* pág. 197). Por lo tanto, recurrir al dinero como recurso de enseñanza en actividades de composición y descomposición con monedas y billetes, promover argumentos en situaciones de cálculo, interpretar la información que portan las escrituras numéricas son algunas de las posibles actividades que favorecen un acercamiento provisorio a esta compleja noción.

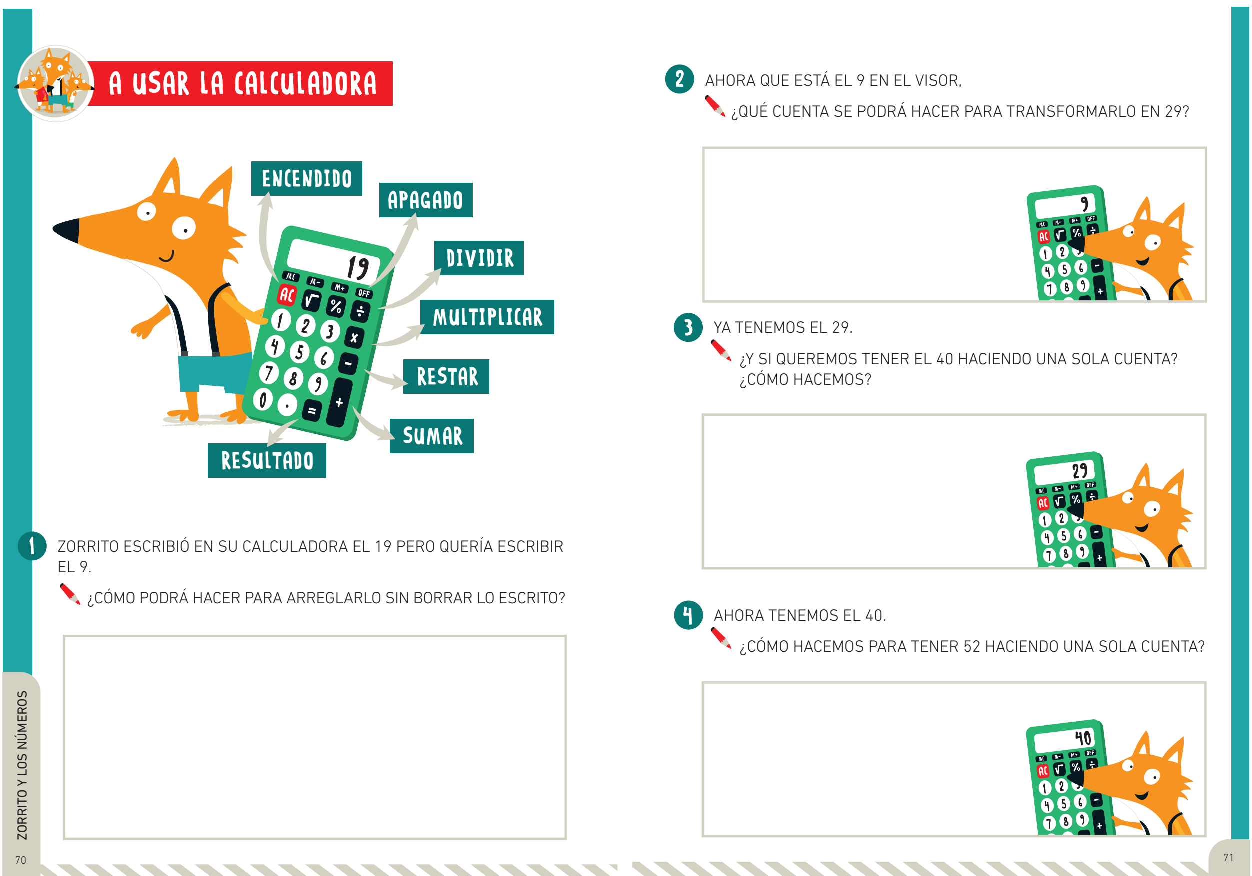
En este caso, el número 1308 plantea un problema adicional pues presenta un cero que significa al mismo tiempo “la ausencia de elementos y la presencia de una posición” (Lerner, 2007, pág. 155). Lerner, en su investigación expresa que “este doble mensaje representado por el cero” pone en evidencia las contradicciones sustentadas por los niños de tercer año cuando expresan: *“el cero no vale nada, pero no puede suprimirse”, “acá no se puede sacar (1308) porque si no es otro número”, “acá sí se saca y no pasa nada”* (09).

Consideramos importante aclarar que el cero es el único número que posee únicamente valor absoluto, y este no varía según la posición que esta cifra ocupe. Es difícil para el alumno captar el valor del cero en sus diferentes funciones: “reserva un lugar” (1308), significa “nada” (09), “al agregarlo a la derecha multiplica por 10 al número” (340); por lo tanto, el dominio de estos conceptos responde a un proceso gradual.

## Problemas con calculadora

Otro recurso a introducir en la clase de Matemática que habilita el acercamiento a la noción de valor posicional es la calculadora:

Para primer año:



Para segundo año:

PENSAR CON LA CALCULADORA



1 Para que aparezca en el visor el número 57, sin utilizar la tecla del 5.
¿Cuáles serían las teclas que utilizarías?

2 Se rompió la tecla del 4. Mulita tiene que resolver 24 + 13.
¿Cómo podría hacerlo?

3 Mulita puede realizar la suma 50 + 50 sin usar la tecla del 5.
¿Cómo lo harías tú?

17

En esta familia de problemas el alumno tiene que desagregar el 57 en 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 7; o bien en 27 + 30, etc., poniendo en juego diferentes formas de descomposición aditiva que vinculan el valor posicional de las cifras. Algunas preguntas por parte del docente pueden establecer puentes entre estos aspectos numéricos: ¿Cuál es la forma más “corta” de anotar el 57? 40 + 17; 47 + 10. ¿Cuántos dieces necesitaron? ¿Y unos? Tal vez, en otra oportunidad, se podría invitar al niño a ir registrando los diferentes números que fueron apareciendo en el visor dejando por escrito el procedimiento realizado.

Para tercer año:

**Problema 1**

Para realizar la resta 147 - 47 sin usar la tecla del 4, ¿cómo podrías hacerlo?

**Problema 2**

Si tienes que hacer con la calculadora 238 + 238 y no funciona la tecla del 2 ¿qué otras cuentas puedes hacer para obtener el resultado?

**Problema 3**

Marca el número 576. ¿Qué puedes hacer para transformarlo en 676? ¿Y en 976? ¿Y para obtener el 1976?

En todas estas actividades, el uso de la calculadora ofrece información al alumno sobre los resultados de su acción. Le es posible comprobar el acierto o intentar, por el contrario, nuevos caminos. Le permite explorar, a través de las distintas actividades la relación entre el valor de la cifra y el lugar que ocupa en términos de cienes, dieces y unos. La intervención del docente habilitará el establecer relaciones entre actividades, sin caer en la explicación “demagógica”, sino por el contrario trabajando con lo que se produjo, recapitulando, de manera de poder afirmar que se ha trabajado un mismo concepto que es propio del funcionamiento del SND. Proponer al alumno dejar registro escrito sobre algunas conclusiones a las que arribaron trabajando en forma individual primero y luego complementando con aportes grupales puede ser otra estrategia que habilite poner en palabras aquello que se sabe. La comunicación escrita exige concretar nociones y deja memoria de algunas ideas alcanzadas que de otra manera se “pierden” inhabilitando el “volver a ellas” para su enriquecimiento y complementación.

## Problemas para considerar el valor posicional ligado al cálculo

### Problema 1

¿Cómo crees que empezará el resultado de cada una de estas cuentas? ¿Por qué? Luego verifica utilizando la calculadora.

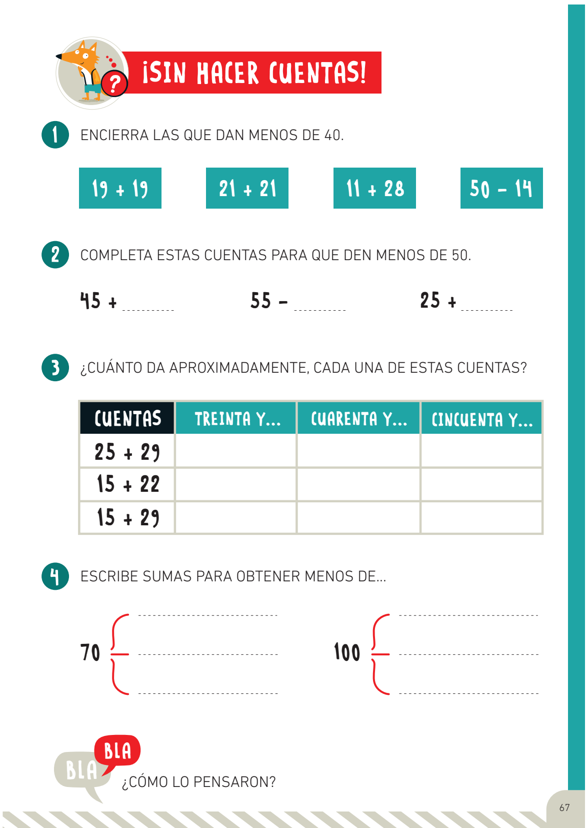
| | |
|---|---|
| 431 + 228 | 435 + 227 |
| 490 + 280 | 458 + 243 |

*Actividad adaptada de Lerner, D. (2005) (Curso IV, PAEPU, 2014)*

El presente problema pretende empezar a pensar por qué a veces la suma da 600 o 700. La situación “obliga” a anticipar una respuesta: *“¿Cómo crees que empezará el resultado?”* Se pretende construir alguna afirmación que permita saber con seguridad si el total pertenece a una u otra “familia”, a la del 600 o a la del 700. Algunos alumnos harán la cuenta pero poco a poco irán construyendo la idea de que a veces la cantidad de unidades que se suma da lugar a la formación de una decena y que sumadas éstas se podrá llegar a la necesidad de formar una nueva centena. Para los alumnos saber que una decena son 10 unidades y que la unidad es 1 puede no ser de ayuda para resolver estas situaciones de cálculo en donde el “me llevo uno” no puede ser explicado desde el conocimiento anteriormente descripto. La calculadora se presenta como un recurso útil para comprobar las anticipaciones realizadas: “Luego verifica utilizando la calculadora”.

Veamos desde un breve recorrido de ciclo este aspecto, en relación al mismo problema:

Para primer año:



¡SIN HACER CUENTAS!

1 ENCIERRA LAS QUE DAN MENOS DE 40.

19 + 19 21 + 21 11 + 28 50 – 14

2 COMPLETA ESTAS CUENTAS PARA QUE DEN MENOS DE 50.

45 + .......... 55 – .......... 25 + ..........

3 ¿CUÁNTO DA APROXIMADAMENTE, CADA UNA DE ESTAS CUENTAS?

| CUENTAS | TREINTA Y... | CUARENTA Y... | CINCUENTA Y... |
|---|---|---|---|
| 25 + 29 | | | |
| 15 + 22 | | | |
| 15 + 29 | | | |

4 ESCRIBE SUMAS PARA OBTENER MENOS DE...

70 { ..........

100 { ..........

BLA BLA ¿CÓMO LO PENSARON?

67

Para segundo año:

Sin hacer la cuenta, ¿cuál será el resultado? ¿Entre 40 y 50? ¿Entre 50 y 60?

24 + 28 27 + 24 25 + 26

Si haces las cuentas en la calculadora, ¿te da lo mismo?

Las preguntas que podrán ayudar a continuar avanzando o a reconstruir nociones trabajadas como, por ejemplo: ¿Con cuáles sumandos formo una decena nueva? ¿En dónde es necesario fijarse para asegurar si es seiscientos o setecientos? ¿Treinta o cuarenta? ¿Es posible darles dos dieces a las decenas? Se podrán ir registrando algunas respuestas, los niños comunican en forma oral y el docente escribe. La necesidad de ir construyendo estas regularidades que ponen en juego nociones en relación al VP permitirá transitar por procesos de generalización estableciendo y consolidando relaciones numéricas.

Estas preguntas y otras más podrán ir desafiando la construcción de este concepto matemático analizando un aspecto del valor posicional que se explicita claramente en el cálculo: el agrupamiento en órdenes numéricos de diferente potencia. Favorecer la producción de explicaciones, la búsqueda de razones, la interacción de pares y con el docente habilitará avances en la conceptualización.

El recorrido en el ciclo para este contenido matemático se inicia ligado a la descomposición numérica y al cálculo donde se pone en juego la relación entre órdenes numéricos. Sabemos que nos enfrentamos a un concepto abstracto y complejo. Aprender el nombre y el valor del lugar mecánicamente podrá lograrse rápidamente pero comprender cabalmente aspectos del valor posicional requerirá otros tiempos. Convenimos que, para este ciclo, será necesario reconocer:

- diferentes maneras de descomposición numérica,
- equivalencias en base 10 en situaciones de conteo,
- y establecer incipientes relaciones entre los órdenes numéricos enmarcadas en contexto social.

Será objetivo de la trayectoria escolar promover la relación entre los órdenes numéricos y el principio de posicionalidad. Por ejemplo, en primer año será necesario centrarse en las unidades-decenas (14 + 18), en segundo en las decenas-centenas (45 + 72) analizando entonces la formación de cada agrupación decimal.

Se propone un trabajo basado en la resolución de problemas numéricos donde el valor posicional sea herramienta de solución, alejándonos de prácticas tradicionales, mecánicas, repetitivas, amparadas en el uso de materiales concretos –collares de 10, paquetes con 100 tapitas; bolsas con pajitas– donde la posicionalidad es sustituida por relaciones aditivas que se alejan notoriamente de la propiedad fundamental de los sistemas de notación posicional.

## f. El orden en los números naturales

### ¿Qué implica el trabajo con orden en los números naturales?

Trabajar la relación de orden en el conjunto de los números naturales implica establecer comparaciones entre dos o más números sabiendo que N es un conjunto ordenado.

Evaluaciones nacionales y regionales (SERCE, 2011) afirman que es esta una función del número difícil de reconocer por los alumnos y que abarca, tal como lo prevé el Programa de Educación Inicial y Primaria (PEIP) relaciones de mayor, menor, igual, el que precede, el que sigue y la posición dentro de un intervalo numérico.

### ¿Qué problemas proponer?

Los problemas, que aparecen al comienzo, corresponden a una serie de juegos que abordan la temática en cuestión. Esta decisión se apoya, entre otras cosas, en el pensamiento de que es posible transformar una actividad lúdica en una situación didáctica a través de la intencionalidad docente.

El juego puede ser utilizado en diferentes momentos de una secuencia, favorece la exploración o la aparición de conocimientos previos, permite reutilizar los conocimientos que se van elaborando o evaluar lo que se va aprendiendo. Incluso en una misma secuencia, el mismo juego puede ser utilizado de diferentes maneras según la complejidad con la que se proponga y el propósito docente que lo anime.

## Problemas para ordenar números naturales

### Problema 1


UNA CINTA CON NÚMEROS

MATERIALES

- UNA CINTA O BANDA CON LOS NÚMEROS DEL 1 AL 30
- CUATRO CARTONES PARA TAPAR NÚMEROS Y CUATRO CLIPS

REGLAS DE JUEGO

POR TURNO, UN JUGADOR TAPA CUATRO NÚMEROS SIN QUE LOS DEMÁS LO VEAN.

EL RESTO DE LOS JUGADORES DEBE DECIR QUÉ NÚMEROS ESTÁN TAPADOS.

POR CADA NÚMERO QUE ACIERTAN SE GANA UN PUNTO.

GANA EL JUGADOR QUE HACE MÁS PUNTOS.

LOBITO Y LOS NÚMEROS 72

1 LOBITO DICE QUE TAPÓ EL NÚMERO 23.

¿ES CIERTO? ¿CÓMO LO SABES?

¿QUÉ OTRO NÚMERO ESTÁ TAPADO?

2 LOBITO DICE QUE TAPÓ EL NÚMERO QUE ESTÁ JUSTO ANTES DEL 20 Y EL QUE ESTÁ JUSTO DESPUÉS DEL 21.

¿DE QUÉ NÚMEROS SE TRATA?

73

Este problema propuesto para NI5 puede ser trabajado en un primer año según el dominio numérico que se focalice. Si incorporamos bandas confeccionadas que incluyan, por ejemplo, los intervalos entre centenas podrían trabajarse en los otros grados del ciclo.

Este juego permite recuperar una de las estrategias que los alumnos utilizan para comparar los números pues es posible identificar el número solicitado apelando al inmediatamente anterior o posterior de acuerdo a su ubicación en la serie. Este juego, de apariencia sencilla, tiene la ventaja de que al destapar el número se produce una situación de validación, sanción o retroacción donde el propio problema da la respuesta al alumno.

Para que el juego no quede solo como una instancia lúdica, será necesario propiciar un espacio de reflexión y de intercambio de estrategias en el que se podrá preguntar, por ejemplo, ¿Cómo es posible darse cuenta del número oculto? ¿Qué números les fueron más difíciles de ubicar? ¿Es cierto que en esta cinta está tapado el veintitrés? ¿Por qué? ¿Cuál es el número que está tapado? ¿Hay una única posibilidad?

En las respuestas de los alumnos aparecerán argumentos que hacen referencia a relaciones con otros conocimientos que pueden vincularse, como por ejemplo las regularidades, el conteo, las representaciones.

También, a partir del juego realizado, es posible evocar con otro dominio numérico el mismo juego simulado con problemas como el siguiente:

### Problema 1.1

Juan dice que tapó un número que precede al 457, ¿de qué número se trata?

**Problema 1.2**

Juan tapó un número que es mayor que noventa y ocho, menor que cien. ¿Qué número es?

**Problema 1.3**

Si Juan quiere poner un cartón que esté entre el quinientos ochenta y el quinientos noventa, ¿entre qué números tiene que decidir?

**Problema 2** - Juego “Mayor-menor”

**Materiales:**

Papel y lápiz para cada niño.

**Reglas de juego:**

Cada alumno anotará, antes de comenzar cada partida, un número de tres o cuatro cifras. Se puede jugar en grupo de varios niños.

Un jugador por partida asumirá el rol de fiscal y tendrá que decir “mayor” o “menor”, después de que todos los jugadores en forma secreta hayan anotado su número.

Luego de pronunciada por parte del fiscal la palabra elegida, cada jugador dará vuelta su papel. Si la palabra dicha fue “mayor”, gana un punto el que escribió el número mayor, de igual manera que si se dijo “menor”, gana un punto el que escribió el número menor.

Al cabo de 5 rondas gana el que hizo más puntos.

En este problema, la validación, a diferencia de la propuesta anterior, será realizada por los propios jugadores, quienes deberán recurrir a otras estrategias disponibles para comparar y ordenar los números. Podrán apelar así a la idea de la cantidad de cifras, –”a mayor cantidad de cifras más grande es el número”–, para determinar cuál es mayor, o pensar que los cientos son menores a los miles. Cuando los números a comparar sean de la misma cantidad de cifras tendrán que comparar el tamaño de la primera cifra –”el primero es el que manda”–, de la segunda, etc. De esta manera, los niños, en el transcurso de su trayectoria escolar, irán descubriendo relaciones entre los números que les permitan establecer el orden entre ellos.

En un espacio de reflexión grupal posterior al juego, se podrá preguntar a los niños cómo hacían para darse cuenta, en cada ronda de los ganadores, con el objetivo de que expliciten los criterios utilizados. También será interesante proponer otras situaciones a partir del juego que den la posibilidad de confirmar, ampliar o modificar lo que pensaron. Ejemplo de ello sería:

**Problema 2.1**

Si el fiscal cantó “menor” y los números que había eran: 198 - 783 - 400 - 347, ¿cuál es el número que ganó en esta ronda?

### Problema 2.2

Si el fiscal cantó “mayor” y los números que había eran: 947 - 909 - 990 - 735, ¿cuál es el número que ganó en esta ronda?

### Problema 2.3

Si el fiscal cantó “mayor” y los números que había eran: 108 - 1008 - 801 - 8001, ¿cuál es el número que ganó la ronda?

### Problema 2.4

Menciona un número que podría ganarle a estos: 756 - 913 - 809.

### Problema 2.5

Estos fueron los números que salieron en una partida: 3784 - 3900 - 1576 - 3889 en la que el fiscal había dicho “mayor”. Martín dijo: “perdí por uno”. ¿Qué número tenía Martín?

### Problema 3


Luego de jugadas algunas partidas, se podrán analizar igual que en el caso anterior, los criterios utilizados para decidir en cada situación cuál es el mayor. Para ello se podrán realizar preguntas que apunten a lo realizado y que de esta forma sea necesaria la argumentación de las estrategias utilizadas.

### Problema 3.1

Un equipo recibió las siguientes cartas: 3 - 6 - 1 - 7, ¿qué número le conviene formar para obtener el más grande posible?

También se pueden tomar decisiones relativas a producir cuestionamientos, que impliquen un trabajo matemático de otro tipo, tendientes por ejemplo al establecimiento de conjeturas. Así podrá plantearse:

### Problema 3.2

Un equipo armó el número 9342. ¿Es cierto que si el otro equipo tiene un nueve ya es seguro que puede ganar?

### Problema 3.3

Un equipo armó el número 5738. ¿Es cierto que si el otro equipo tiene un nueve ya es seguro que puede ganar?

Cabe señalar que en estas dos preguntas, que son iguales, la situación es diferente. En el primer caso no es suficiente con que tenga un nueve porque si bien es seguro que pueden armar un número correspondiente a los nueve mil, para ganarle al número ya formado, va a depender de las otras cartas. Sin embargo, en el segundo caso sí es suficiente, porque cualquier número de los nueve mil va a ser mayor que el de los cinco mil ya armado.

A continuación se presenta otro grupo de problemas para segundo o tercer año que apuntan a ordenar números en un intervalo.

### Problema 4


*Actividad de la Evaluación alineada a perfiles SEA (Noviembre 2015)*

**Problema 5**


En estas páginas del álbum se pegan las figuritas desde la 394 a la 410.
¿Cuál de las siguientes figuritas puedo pegar en esta página?

A) 40
B) 97
C) 385
D) 406

*Actividad extraída de la Evaluación en línea (2015)*

Estos dos problemas apuntan a ordenar un número dentro de un intervalo. En el problema de las figuritas se puede recurrir a la estrategia de: a mayor cantidad de cifras, mayor es el número; habrá que decidir entonces entre los dos números de tres cifras. En este caso, no servirá mirar la primera cifra porque el intervalo abarca números de tres centenas y de cuatro centenas. Otro procedimiento posible ya que el intervalo abarca 15 números, es realizar el conteo a partir del 394 y ver cuál se nombra antes de llegar al 410.

En el problema de los libros, al comenzar todas las opciones con el mismo número, mirar las decenas solo permitirá descartar la opción A. Se tendrán que observar entonces las unidades, pero a su vez notar que el 486 y el 498 están fuera del intervalo. Nuevamente otra opción puede ser recurrir al conteo. También puede ser que se observe que el 486 y el 498 son el que precede y el siguiente del intervalo, por lo que quedarían fuera, al igual que el 478 por ser menor al intervalo.

El análisis de estos problemas, las posibles formas de resolución para identificar la respuesta correcta y el análisis de los distractores, aportan información acerca de cómo pueden pensar los alumnos y cuáles son los obstáculos a los que se enfrentan. Esto puede dar información sobre el estado de conocimiento y tomar decisiones desde la enseñanza, ya sea para intervenir o planificar futuras intervenciones. También puede ser de utilidad reflexionar con los alumnos sobre cómo pensaron ellos para encontrar la respuesta, sea esta correcta o no, y a partir de los errores promover la reflexión y producir aprendizaje.

**Problema 6**

En la escuela, el día de las elecciones municipales, funcionaron los siguientes circuitos:

| Serie CDA | |
|---|---|
| Circuito N.° | Número de credencial |
| 34 | 30.400 - 30.950 |
| 35 | 30.951 - 31.436 |
| 36 | 31.437 - 31.987 |
| 37 | 31.988 - 32.517 |
| 38 | 32.518 - 33.012 |
| 39 | 33.013 - 33.521 |

Registra en qué circuito les correspondió votar a quienes tenían, de esa serie (CDA), los siguientes números:

32.600
30.450
32.510

*Actividad extraída y adaptada de archivos de Cursos de Apoyo a la Enseñanza de la Matemática. PAEPU. 2010.*

Este problema, si bien también requiere asociar un número a un intervalo, para dar la respuesta correcta supone por parte de los alumnos un trabajo diferente. En primer lugar, porque una vez encontrado el intervalo, la respuesta debe estar asociada al circuito correspondiente, lo que exige una mayor interpretación de la actividad a realizar. En segundo lugar, porque el rango numérico es mayor (incluye las decenas de mil) y también es mayor la cantidad de números dentro del intervalo, descartando entonces la estrategia del conteo. Probablemente una estrategia utilizada sea la de comparar el número a ubicar con el primer número del intervalo, si es mayor el número a ubicar que la cifra de inicio del intervalo, entonces es posible que corresponda a ese intervalo. Luego habrá que comparar el número a ubicar con el número del final del intervalo y comprobar si es menor que él. Si es así, se habrá encontrado el intervalo correcto. Este procedimiento, que posiblemente resulte como la estrategia óptima para ubicar un número dentro de un intervalo, tal vez no surja espontáneamente, pero, incluir este tipo de actividad puede llevar a realizar conjeturas acerca de los procedimientos más adecuados para ello y son actividades que conviene proponer desde la enseñanza para modelizar procedimientos eficaces y producir avances.

Así como la propuesta anterior avanza en el rango numérico y la cantidad de números dentro del intervalo, conviene precisar que al trabajar con este tipo de problemas, sería conveniente proponer también ubicar números en intervalos que se correspondan con agrupamientos derivados del sistema de numeración. Es decir que algunas propuestas que se realicen tengan como extremos de los intervalos las decenas o las centenas, de tal forma que se puedan encontrar las relaciones con regularidades del SND.

Otro tipo de variable que puede tenerse en cuenta a la hora de pensar problemas de orden es cambiar el contexto y proponer problemas en contexto matemático.

**Problema 7**

En cada línea elige el número que te sirve para colocar en los puntos de tal forma que queden ordenados de menor a mayor:

**250 91 350**
**251 278**
**252 307 79**

65 …….. 87

265 ……….. ………….. 312

…………. 105 ………… 284 …………..

Los siguientes problemas presentan pistas que se fundamentan en la relación de orden para identificar el número que se piensa.

**Problema 8**

Luisa pensó un número; dice que puede llegar a él contando de diez en diez y después tres.

Que no es más chico que 50. Ni más grande que 60. ¿Qué número pensó?

**Problema 9** - Indica: V F

El 98 está entre el 90 y el 100.

Inmediatamente después del 990 está el 1000.

## Un recurso a utilizar: la recta numérica

Para ubicar números en diferentes intervalos es posible incorporar la utilización de la recta numérica. Sabemos que para que su representación sea correcta, los espacios deben ser proporcionales. Por esa razón, no es conveniente que los niños de los grados inferiores construyan la recta, pero sí es posible darles una recta en la que estén marcados los intervalos con sus números correspondientes y ubicar en ella determinados puntos con cartelitos para que ubiquen a qué número corresponde, número que puede ser seleccionado de una lista dada.

En síntesis, a través de esta familia de problemas se ha focalizado la relación de orden que implica establecer comparaciones entre cantidades y números estableciendo relaciones de igual que, menor que, mayor que, anterior, siguiente, y la pertenencia a un intervalo.

# Capítulo 2: Numeración racional en el Primer Ciclo

## 2.1 Consideraciones curriculares

### a. El trabajo con Numeración en el Primer Ciclo

Las consideraciones curriculares para numeración (natural y racional) están explicitadas en la pág. 15.

### b. Avances en el Primer Ciclo

#### ¿Qué comprende el trabajo con la numeración racional en el Primer Ciclo de la Enseñanza Primaria?

La construcción de la numeración racional requiere un complejo proceso que el alumno deberá transitar a lo largo de todo el ciclo escolar y, aunque se inicia en el Primer Ciclo, se desarrolla fundamentalmente a partir del Segundo Ciclo de primaria y parte del nivel secundario.

El Programa de Educación Inicial y Primaria incorpora el contenido numeración racional desde el Nivel Inicial. Contenidos como la relación parte-todo en cantidades discretas y el todo dividido en partes iguales, en tres años; la relación parte-todo en cantidades discretas y continuas en cuatro años y la noción de partes equivalentes en contextos continuos, la noción de partes congruentes en la división de la unidad, la noción de mitad y mitades, así como la representación numérica en cinco años, dan cuenta de la introducción a la numeración racional y del desarrollo conceptual propuesto para el Nivel Inicial. En este nivel se producen en la escuela las primeras aproximaciones en relación a su uso en situaciones de medida y vinculadas al conocimiento cotidiano del alumno.

En la selección de problemas que aquí se presentan se propone comenzar a trabajar en forma sistemática la idea de mitad a partir de elementos del entorno del niño que permitan la manipulación y habilitan la comparación y la validación por plegado, corte o superposición de partes, por ejemplo.

En primer año, la construcción del concepto de número racional transita por la introducción de la fracción como número, fracción de conjunto y de unidad, composición y descomposición de unidades, fracciones menores que la unidad y unidad y representación gráfica de fracciones. De este modo, en el primer año el centro de análisis de la numeración racional se sitúa en la fracción. Habitualmente este tema se vincula a las clásicas presentaciones gráficas ("torta", figuras geométricas, etc.) en las cuales aparece un todo dividido en partes iguales y el alumno se limita a la identificación de la, o las, partes. No obstante, se considera necesario proponer, desde el comienzo de la escolaridad, actividades que también habiliten la puesta en juego de otros significados de la fracción como el de reparto equitativo y el de medir.

Las situaciones de reparto exigen tener en cuenta la equitatividad de las partes y la exhaustividad del reparto, mientras que en las de medición se presenta a la fracción como expresión de una medida. En estas últimas se plantea la necesidad de comunicar el resultado de una práctica efectiva de medición donde la unidad "no entra" una cantidad entera de veces en la cantidad de magnitud a medir generando así la necesidad de realizar un fraccionamiento de la unidad. Avanzar en la conceptualización de equitatividad de las partes permite iniciar el análisis de la relación parte-todo: cuanto mayor es la cantidad de partes, menor es el tamaño de cada una de ellas.

Gran parte de los alumnos que transitan estos primeros años, cuentan con conocimientos matemáticos adquiridos a través de sus experiencias fuera y dentro de la escuela que son un punto de apoyo clave para transitar este contenido. Expresiones como "refresco de litro y medio", "¿cuánto cuesta el medio kilo de helado?", "cuarto kilo de pan", "me gustan las remeras con manga tres cuartos" permiten que el niño se enfrente a números distintos a los naturales ya conocidos, aunque los mencione y no sepa cómo escribirlos simbólicamente.

En segundo año se avanza hacia la conceptualización de fracciones equivalentes y mayores a la unidad, composición y descomposición de la unidad, comparación y ordenación de fracciones, relación de equivalencia de fracciones conocidas.

En este nivel se incorpora el trabajo con composiciones y descomposiciones aditivas de la unidad donde los niños pueden apoyarse en el lenguaje natural oral para explicar sus razonamientos y participar de confrontaciones con el propósito de reflexionar sobre este trabajo con los números racionales. Entendemos pertinente postergar las multiplicativas ya que los alumnos no cuentan con muchos elementos donde apoyarse para su trabajo.

La expresión decimal implica una forma distinta a la fracción y a la representación gráfica del número racional que se desarrollará fundamentalmente, así también como punto de una recta, a partir del Segundo Ciclo.

Para la noción de equivalencia en este ciclo se propone un trabajo que se centrará especialmente en $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{4}$ donde podrán coordinarse distintas representaciones de ambos números y aparece de forma transversal en varios problemas de los propuestos. Específicamente se propone un juego y problemas para poner en juego y favorecer el surgimiento de explicaciones en torno a fracciones equivalentes.

## c. Contenidos programáticos y perfiles

Al analizar en el Programa 2008 los contenidos programáticos correspondientes a numeración racional, se encuentran organizados según cuatro aspectos: las representaciones decimal y fraccionaria de los números racionales, el valor posicional, la relación de orden y las composiciones y descomposiciones aditivas y multiplicativas.

| Año | Contenidos ligados a los perfiles |
|---|---|
| **Tres años** | La relación parte - todo en cantidades discretas. |
| **Cuatro años** | La relación parte - todo en cantidades discretas. |
| **Cinco años** | La noción de partes congruentes en la división de la unidad (discreta).<br>La noción de mitad y mitades |
| **Primer año** | La fracción como número: $\frac{1}{2}$.<br>La composición y descomposición de la unidad con: medios, cuartos.<br>Las fracciones menores que la unidad: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ y $\frac{3}{4}$.<br>La representación gráfica de fracciones. |
| **Segundo año** | La composición y descomposición de la unidad con: medios y cuartos; medios, cuartos y octavos; tercios; quintos.<br>La comparación y ordenación de fracciones: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$.<br>Las fracciones equivalentes y mayores que la unidad. La equivalencia de fracciones conocidas |

| | |
|---|---|
| **Tercer año** | La relación de equivalencia entre fracciones. La fracción decimal, décimos (la notación fraccionaria).<br>La fracción como cociente.<br>La comparación y ordenación de fracciones decimales mayores, menores e iguales a la unidad.<br>La representación de fracciones mayores y menores que la unidad como puntos de una recta<br>La relación de equivalencia entre fracciones, entre expresiones decimales y entre fracciones y decimales.<br>La fracción decimal, décimos (la notación fraccionaria y decimal). |

Al poner en relación los contenidos año a año del cuadro anterior con los perfiles de egreso de tercer año se deriva, para cada aspecto, la siguiente tabla donde se explicita la secuenciación planteada.

| Conceptos y contenidos programáticos Vinculados | Perfil de egreso de tercer año |
|---|---|
| **Representaciones**: expresiones decimales y fraccionarias: escrituras equivalentes, interpretación. Representaciones gráfica y numérica. Relaciones entre representaciones. | Resolver situaciones que apelan a la fracción como cociente de números enteros. |
| Interpretar, registrar y comunicar una cantidad mayor o menor que la unidad en representaciones: gráfica, decimal, fraccionaria. | Identificar escrituras fraccionarias equivalentes. |
| **Composición y descomposición**: aditiva y multiplicativa usar la relación entre el número de partes y el tamaño de las partes en la resolución de situaciones | Componer la unidad, aditiva o multiplicativamente a partir de medios, cuartos, octavos, décimos en situaciones con representaciones gráficas, fraccionaria y decimal. |
| **Orden**: relación de orden comparar y ordenar expresiones decimales y fraccionarias | |

## 2.2 Familias de problemas

### a. La representación de cantidades en forma fraccionaria

#### ¿Qué problemas presentar?

Es escaso el uso de las fracciones en situaciones cotidianas al alcance de los niños de Primer Ciclo. Es por eso que su enseñanza enfrenta dificultades para la elección de contextos de uso que tengan sentido. Centralmente es para expresar medidas de peso o capacidad o repartos de cantidades en fracciones como ½, ¼, ¾, 1 y ½ que se utilizan para designar cantidades de alimentos, en algunos casos.

Nos centramos principalmente en el trabajo con las fracciones, la escritura del número mixto y las representaciones gráficas de los números racionales.

## Problemas para registrar y comunicar cantidades

### Problema 1

¡QUÉ RICOS ALFAJORES!

1 LOBITO HIZO 4 ALFAJORES Y VA A REPARTIRLOS ENTRE ZORRITO Y MULITA. QUIERE DARLE LA MISMA CANTIDAD A CADA UNO.

¿CUÁNTO LE DARÁ A CADA UNO?



LOBITO Y LOS NÚMEROS

58

En NI5 la situación podría plantearse de forma oral utilizando alfajores reales o figuras que los representen para permitir a los niños ejecutar efectivamente el reparto solicitado. Este hecho permitiría al docente observar cómo lo realizan (dos para cada uno o uno a uno hasta agotarlos) con el propósito de hacer visibles diferentes estrategias que ponen en práctica los niños al repartir.

En primer año es posible presentar la propuesta de trabajo impresa y solicitar a los niños que respondan las preguntas por escrito con el propósito de analizar los resultados a los que arriban. No obstante, es interesante interrogarlos acerca de cómo hicieron el reparto o si hay alguna otra forma de realizarlo. De este modo el docente indagará respecto a las estrategias que han desarrollado los alumnos y contribuirá a la reflexión de cada uno de ellos al promover diferentes formas de realizar el reparto. Una instancia de trabajo colectivo sobre las diferentes alternativas de resolución se constituirá una oportunidad para avanzar hacia la construcción de conocimiento. Antes de iniciar el reparto, se podría introducir algunas interrogantes tendientes a reflexionar acerca de qué significa "repartir todos" y "darle la misma cantidad a cada uno". El registro en el pizarrón de algunas respuestas que resulten interesantes (podrían ser solo las erróneas, por ejemplo) constituyen un valioso recurso para continuar trabajando y retomarlas, en caso de ser necesario, después de realizado el reparto para reflexionar sobre ellas.

Una vez que se ha realizado el reparto, se podría avanzar hacia la validación de las diferentes respuestas a partir de preguntas que orienten a los alumnos: "¿Cómo podemos estar seguros que les tocó la misma cantidad a Zorrito y a Mulita?". De este modo se posiciona a los alumnos en situación de recurrir a sus propios conocimientos y a partir de las estrategias utilizadas volver al problema, pero ahora desde otro lugar.

Un avance en la conceptualización del número racional implica introducir una situación de reparto cuando el resultado no es exacto. Si la condición es repartir la totalidad de elementos, el alumno se ve obligado a desplegar diferentes estrategias para agotar la colección. Algunos niños podrían reparar en la necesidad de respetar la equitatividad, en tanto otros reconocen la necesidad de obtener "partes" aunque no necesariamente centren su atención en la igualdad de ellas.

### Problema 2


**2** MULITA Y ZORRITO QUIEREN COMER LA MISMA CANTIDAD Y LOBITO SOLO TIENE ESTE ALFAJOR.

ESCRIBE Y DIBUJA CUÁNTO LE DARÁ LOBITO A CADA UNO.

BLA BLA ¿CÓMO TIENEN QUE SER LOS TROZOS PARA QUE NADIE SE ENOJE?

59

### Problema 3

Problema para primer año

**REPARTIENDO COSAS RICAS**

**1** ZORRITO TIENE 1 FLAN Y QUIERE DARLE LA MISMA CANTIDAD A SUS 2 AMIGOS Y QUE NO LE SOBRE NADA.

¿CUÁNTO LE TOCA A CADA AMIGO?

## Problema 4

3 ZORRITO TIENE 5 ALFAJORES Y QUIERE DARLE LA MISMA CANTIDAD A DOS 2 AMIGOS Y QUE NO LE SOBRE NADA.

¿CUÁNTO LE TOCA A CADA AMIGO?

Una vez más se hace necesario tener en cuenta que los niveles conceptuales varían de un alumno a otro atendiendo a diferentes variables. Así, por ejemplo, encontraremos alumnos que muestran dominio de la idea de reparto equitativo o de la de exhaustividad, pero no de ambas. Por este motivo es importante que el docente proponga el trabajo con diferentes situaciones que habiliten la puesta en práctica de los saberes de todos los alumnos con el propósito de poner en discusión ambas ideas y su significado. El trabajo complementario con regletas o puzles circulares con diferentes fraccionamientos habilita a los niños a componer, descomponer, comparar las partes, analizar la relación parte-todo y validarlo.

## Problemas para identificar escrituras fraccionarias equivalentes

Dadas las escasas herramientas y conocimientos de los que disponen los alumnos en este nivel en relación a fracciones, se decidió centrar el concepto de fracciones equivalentes entre las fracciones $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{4}$. Si bien en algunos problemas presentados están dadas las condiciones para que los alumnos se enfrenten a otras equivalencias de fracciones, se optó por realizar una presentación de este perfil de manera transversal a otros perfiles como comparar y ordenar expresiones fraccionarias o componer la unidad aditivamente a partir de medios, cuartos u octavos, en situaciones con representaciones gráficas y fraccionarias.

Identificar dos fracciones como equivalentes es la resultante de la comparación entre dos fracciones, de ahí que se trataría de una situación particular vinculada al primer perfil. Por otra parte, de la composición de una misma fracción a partir de medios y cuartos, también resulta una fracción equivalente.

Relacionarse con las nociones de mitad y cuarta parte es anterior a la posibilidad de expresar esa cantidad en forma numérica. Los niños introducen en su discurso el término "mitad" desde una perspectiva social y con menor frecuencia hacen referencia a "cuarto". Expresiones como "*la mitad de la clase no trajo merienda*", "*le di la mitad a Martín*" o "*estaba en la mitad de la calle*" dan cuenta de la presencia del concepto. No obstante, este uso social dista mucho de su representación numérica convencional. Desde el uso social se observa que generalmente se asocia mitad a la idea de partir en dos, pero no a que esas partes sean iguales, por lo cual es una idea con fuerte presencia en los niños que debe ser puesta en crisis.

La introducción de propuestas tendientes a avanzar en la construcción de los conceptos "mitad" y "cuarto", así como la comparación entre ellos habilitará al alumno a transitar hacia la construcción de la idea de equivalencia entre las fracciones.

En primer año es posible incluir el trabajo con representaciones gráficas e introducir la notación numérica. No obstante, es importante continuar trabajando a partir de la manipulación de materiales que permitan la superposición y el plegado para validar los resultados como forma de avanzar hacia las múltiples escrituras numéricas. Introducir interrogantes que conduzcan al niño a fundamentar su respuesta constituye una instancia de gran valor en la búsqueda de fracciones equivalentes. ¿Es lo mismo $\frac{1}{2}$ que $\frac{2}{4}$? ¿Cómo podemos asegurarnos?

En tercer año, el análisis de este tipo de propuesta facilita la construcción de vínculos entre el concepto de unidad y parte. Visualizar las partes en relación al total habilita a comparar diferentes formas de reparto y analizar relaciones de equivalencia.

Una de las características propias de los números racionales es que una misma cantidad puede escribirse de diferentes maneras. En ese sentido, Itzcovich (2014) afirma que "dos fracciones son equivalentes cuando, a pesar de estar escritas en forma diferente, representan el mismo número, es decir, expresan la misma cantidad". La internalización de esta noción requiere de la participación de los alumnos en el trabajo con diferentes situaciones que los pongan en situación de reflexionar, discutir y analizar las relaciones entre dos o más fracciones respecto a su equivalencia. No obstante, resulta difícil para ellos identificar la equivalencia en situaciones abstractas (por ejemplo, $^{4}/_{14} = {}^{10}/_{?}$).

**Problema**

Guazubirá dice que comió $^{3}/_{4}$ de chocolate y Zorrito dice que comió $^{6}/_{8}$ de un chocolate igual al de Guazubirá, ¿es cierto que los dos comieron la misma cantidad? Explica tu respuesta.

¿Cómo analizar esta situación para comprobar que Guazubirá y Zorrito comieron la misma cantidad de chocolate? Un itinerario posible es pensar que, si bien Guazubirá repartió su barra de chocolate en 4 partes y comió 3 y Zorrito la repartió en 8 partes y comió 6, ambos comieron la misma cantidad porque los trozos de Zorrito correspondían a la mitad de los de Guazubirá, por tanto, si comió el doble de trozos, la cantidad total que comió es igual a la que comió Guazubirá.

## b. La composición y descomposición de cantidades

### ¿Qué problemas presentar?

Parecería muy exigente componer la unidad multiplicativamente a partir de los conocimientos de los que disponen los alumnos. Por ese motivo es que no abordamos esta forma de componer la unidad en este ciclo.

## Problemas para usar la relación entre las partes y su tamaño

**Problema 1**

Con un litro de refresco se llenan 4 vasos iguales.

¿Qué cantidad de vasos podrán llenarse si el tamaño de los que se utilizan ahora es la mitad de los anteriores?

Del trabajo con propuestas como la anterior surge el análisis de relaciones como las siguientes:

1 botella - 4 vasos,

1 botella - x vasos pequeños,

4 vasos - x vasos pequeños.

El análisis de la relación que existe entre el número de partes y el tamaño de las partes al repartir unidades equivalentes puede proponerse tempranamente en el Primer Ciclo. El propio Programa incluye en el NI4 "La relación parte-todo en cantidades discretas y continuas".

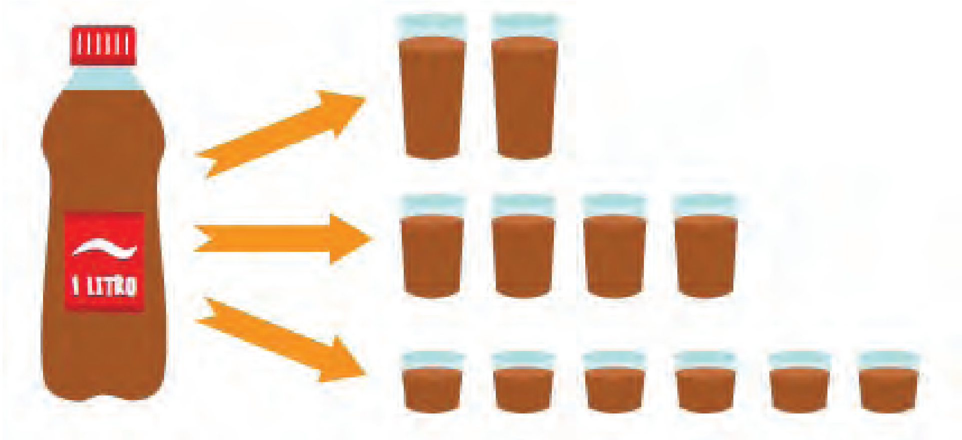
El reparto en actividades cotidianas, así como el trabajo con diferentes materiales y diversas propuestas favorece el avance en la conceptualización de la relación que existe entre el tamaño de las partes y la cantidad de partes en que se divide la unidad. De ahí la importancia de ofrecer al niño situaciones de reparto y promover el análisis y la reflexión a partir de los resultados obtenidos.

Avanzar en la comprensión y la validación de este tipo de situaciones requiere manipular, analizar y comprobar la relación que existe entre las partes y el todo utilizando modelos discretos y continuos. No obstante, la abstracción de esta relación resulta difícil de lograr en el Primer Ciclo.

**Problema 2**

Repartimos el contenido de la botella hasta vaciarla totalmente utilizando vasos de diferentes tamaños.

Observa la tabla y analiza qué sucede con la cantidad de refresco que podrías poner en los vasos de diferente tamaño.




El análisis de este tipo de relaciones constituye la base de construcciones conceptuales como la equivalencia, la composición y descomposición aditiva de la unidad y la comparación y ordenación de fracciones.

En la situación anterior, su análisis permitiría comprender que cada uno de los vasos grandes contiene la mitad del líquido de la botella, cada uno de los vasos medianos contiene una cuarta parte del líquido de la botella y que cada uno de los vasos pequeños contiene un octavo del líquido de la botella. Por tanto, a medida que los vasos son más pequeños podemos llenar más cantidad de ellos, es decir cuanto mayor es el número de partes, menor es su tamaño.

## Problemas para componer y descomponer la unidad aditivamente

Este problema se propone abordar la composición y descomposición aditiva de la unidad a partir de otras cantidades expresadas en distintas representaciones (gráficas y fracciones). También habilita a componer y comparar fracciones a partir de otras y el encuentro de equivalencias. Se pretende, a partir de un juego, determinar los valores de las partes que componen la unidad.

**Problema 1** - Juego: La escoba del 1

**Materiales:**

Cartas con rectángulos de igual tamaño donde se pintaron las partes del mismo color: 2 cartas con $^1/_2$, 4 cartas con $^1/_4$, 8 cartas con $^1/_8$. Se confeccionan tres "palos": el rojo, el azul y el amarillo, 14 de cada color. Además, un rectángulo unidad para cada jugador.

**Reglas de juego:**

Se juega entre 3 o 4 jugadores.

Se reparten 3 cartas a cada jugador y se colocan 4 cartas boca arriba en el centro de la mesa. Cada jugador, por turno, trata de formar un entero con una de sus cartas y las cartas de la mesa que necesite. Si lo forma, las levanta, muestra cómo formó el entero y las coloca a su lado. Para comprobar que tienen un entero, pueden ubicar las partes sobre su rectángulo unidad, realizando una comprobación empírica. Si no puede formar un entero, tira una de sus cartas al centro de la mesa para que continúe el siguiente jugador. Una vez que juegan sus 3 cartas los 4 jugadores, se reparten nuevamente 3 cartas a cada uno, pero no se agregan nuevas al centro.

Gana un punto cada jugador que tenga “escoba”, es decir, que haya formado un entero recogiendo todas las cartas de la mesa y otro punto por el mayor número de cartas recogidas al finalizar la partida.

Al terminar la partida, gana el juego quien sume más puntos.

Este juego puede ser propuesto tanto en segundo como en tercer año. Posibilita sumar medios, cuartos, y octavos en un contexto intramatemático y poner a discusión distintas formas para componer la unidad (u otras cantidades) favoreciendo la construcción de sentido de la suma de números racionales como suma de las partes de un todo.

El hecho de que los niños puedan manipular las cartas permite la comparación y constatación de los resultados obtenidos de forma efectiva. Por ello, tienen una forma de control de su elección en la formación del entero: es correcta sí con las partes se forma el rectángulo completo. También permite la constitución y la ampliación del repertorio de equivalencias, al enfrentarse y reconocer, por ejemplo, que dos (cartas) de un cuarto o cuatro de un octavo forman un medio. En ese sentido, para justificar sus resultados pueden apoyarse en la equivalencia de las representaciones. Dependiendo de las características y de los conocimientos de los alumnos del grupo, dada la cercanía a estas expresiones, en estos casos se podría hacer referencia a la multiplicación.

Una de las posibilidades es organizar y proponer el juego en dos días consecutivos. En el primer día, los alumnos pueden jugar en pequeños grupos y, en el segundo, desarrollarlo en forma colectiva donde participa toda la clase.

Para desarrollar el trabajo en pequeños grupos, antes de repartir las cartas y dar comienzo al juego sería conveniente, por un lado, describir a toda la clase en qué consiste el juego y por otro lado, destinar cierto tiempo para que los alumnos puedan explorar las cartas. Estas dos acciones ayudarían a que todos entendieran cómo se juega y lo que se debe hacer. Además, se podría solicitar que escriban en sus cuadernos distintas maneras en que forman la unidad. Los alumnos debieran sentirse habilitados a elaborar una representación numérica de las representaciones gráficas al momento de jugar.

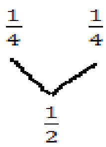
En esta instancia se espera que los alumnos puedan resolver situaciones que irán surgiendo en el juego donde están involucradas sumas de dos o más racionales o sumas repetidas del mismo racional sin necesidad de conocer el algoritmo convencional de la suma de fracciones. Es conveniente que el docente intervenga para promover el surgimiento de razones matemáticas en las situaciones en que los niños no se pongan de acuerdo y vaya tomando nota de aquellas que considere potentes para poner a discusión con toda la clase.

Para el trabajo colectivo, el docente podría levantar las anotaciones de las jugadas que los alumnos realizaron en los pequeños grupos considerando algún criterio. Por ejemplo, un criterio podría ser las composiciones que generaron mayor discusión a la interna de los grupos o aquellas en que la pertinencia para levantar está en discusión. Se podría presentar la siguiente situación: si en la mesa hay un medio, un octavo y un cuarto, ¿qué carta necesitamos para levantar? ¿Existe otra posibilidad? ¿Y si podemos utilizar más de una carta?

Es esperable que surjan composiciones como por ejemplo medio más otro medio, medio más un cuarto y otro cuarto, medio más cuarto más un octavo y otro octavo. Estas y otras composiciones de la unidad se constituyen en un soporte para la realización de cálculos mentales con sumas de números racionales.

Llegado a estas composiciones, con el propósito de hacer intervenir a otros alumnos y que se ponga en juego lo ya elaborado, se podría intervenir preguntando: ¿Con dos de un octavo se forma un cuarto o es al revés? Este tipo de intervención ayudaría a que se cuestione lo aparentemente ya establecido por todos hasta aquí.

Es importante que el docente tome registro en el pizarrón de las distintas composiciones y relaciones que se van estableciendo entre los números. Una opción interesante es escribir las composiciones que los alumnos encontraron para armar la unidad a través de fracciones. Estas, las anotaciones y las relaciones, son un fuerte apoyo para enfrentarse a que un mismo número se puede componer de distintas maneras para introducir algunas relaciones de equivalencia entre fracciones.

Por ejemplo, convendría que en el pizarrón este escrito algo así 

para afirmar que *"dos de un cuarto forman un medio".*

Por otro lado, que $^1/_4$ y otro $^1/_4$ son $^1/_2$. Entonces podemos afirmar que $^1/_2$ y $^2/_4$ son fracciones equivalentes.

## Problema 2

Se propone un listado de operaciones que simulan jugadas del problema anterior donde los alumnos debieran completar el recuadro con la fracción correspondiente para que se cumpla la igualdad.

En cada caso, completa el recuadro para que se cumpla la igualdad.

$^1/_2$ + ¼ + $\boxed{\phantom{000}}$ = 1

¼ + $^1/_8$ + $^1/_2$ + $\boxed{\phantom{000}}$ = 1

A partir de las respuestas de los alumnos a este problema, el docente podría preguntar: ¿Cuántas de $\frac{1}{4}$ se precisa para componer la unidad?, ¿y de $\frac{1}{8}$?

Si se tienen 5 cartas de $\frac{1}{8}$, ¿es más o menos que la mitad?

Si se quiere tener 2 enteros y se tienen una carta de $\frac{1}{2}$ y tres cartas de $\frac{1}{4}$, ¿qué cartas faltan?

Sería oportuno, al finalizar el trabajo en los pequeños grupos y el trabajo colectivo, realizar alguna síntesis sobre las diferentes maneras de componer la unidad y algún otro racional en caso de haberlo realizado y las equivalencias utilizadas. Para ello, nuevamente el rol del cuaderno del alumno juega un papel importante como herramienta de trabajo en la clase de Matemática.

## c. La relación de orden entre números racionales

Comparar dos fracciones y decidir sobre cuál es mayor o menor de las dos promueve que los niños construyan nuevas relaciones entre los números racionales. Como se desprende del análisis realizado del problema, se prevé que surjan diferentes estrategias para la toma de decisiones sobre el orden de números racionales dependiendo de sus representaciones y de los conocimientos que los alumnos dispongan para ello.

Inicialmente, es importante dar a los alumnos la oportunidad de realizar comparaciones de partes de un mismo entero de forma empírica para comprobar por eventual superposición cuál parte es mayor, menor o si son equivalentes (iguales).

En este sentido, es importante reforzar el trabajo de los alumnos con experiencias empíricas que contribuyan a establecer relaciones entre enteros y partes y no apurar el ingreso a las escrituras numéricas convencionales.

Al enfrentarse a algunos casos de equivalencia o de orden, los alumnos podrían utilizar la equivalencia o no de los repartos. Por ejemplo, para decidir que $4/8$ es lo mismo que $2/4$ al argumentar que ambas provienen de repartos equitativos de 4 alfajores entre 8 personas. Es deseable que entren en acción nuevas estrategias de argumentación que habilitarían otras relaciones entre los números puestos en juego y llegar a reconocer estrategias más convenientes o más prácticas según los números a comparar.

### ¿Qué problemas presentar?

Pensar en el orden de los números racionales requiere introducir cambios a nivel de relaciones en cuanto a las construidas en los naturales. Por ejemplo, reconocer que $1/2$ es un nuevo número y no dos números naturales. Esto implica cambiar algunas ideas que estaban presentes en el campo de los naturales, entre ellas, la manera de reconocer cuando una fracción es mayor que otra. De este modo, uno de los obstáculos reconocido es que los niños inicialmente no piensan que $1/4$ es menor que $1/2$ porque “miran” que 4 es mayor que 2.

Una vez que los alumnos logran analizar nuevas relaciones y comparan partes de un mismo entero, logran trasladar con mayor facilidad estas observaciones a la escritura convencional y concluir por qué $1/2$ es mayor que $1/4$.

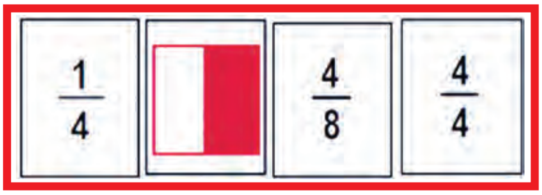
## Problemas para comparar y ordenar expresiones fraccionarias

**Problema 1** - Juego "La batalla racional"

**Materiales:**

El mazo está formado por 24 cartas con diferentes representaciones de números racionales y consta de: 8 cartas con $^1/_2$, 4 cartas con $^1/_4$, 3 cartas con 1, 3 cartas con $^5/_4$, 3 cartas con $^3/_2$, 2 cartas con $^3/_4$ y 1 carta con $^1/_8$.

A modo de ejemplo se presentan algunas cartas que utilizaremos en el análisis del problema:




**Reglas de juego:**

Se reparten todas las cartas entre los jugadores. Cada uno de los ellos echa a la mesa una carta boca arriba. El que haya sacado la carta más alta se queda con todas las demás, dejándolas en un montón aparte, propio de cada jugador.

En caso de empate, los jugadores que sacaron la carta con el mismo valor deben sacar otra más para desempatar. El que vence en el desempate se lleva todas las cartas de la mesa.

Gana la partida el que más cartas haya acumulado en su montón ganadas una vez que se terminen las repartidas inicialmente.

Este problema se propone que los alumnos logren la adquisición de estrategias para comparar números racionales y seleccionen la más adecuada.

Al presentar cartas con diferentes representaciones se pretende que los alumnos, a la hora de decidir cuál es la carta mayor en cada mano, puedan encontrar apoyo en los conocimientos que tienen disponibles para ponerlos en juego y asuman el rol de productores y comunicadores de sus ideas. Sabemos que cada tipo de representación promueve la búsqueda de diferentes estrategias de comparación.

El maestro podrá decidir la cantidad y las representaciones de las cartas para armar el mazo con el que desea trabajar de acuerdo a características de su grupo: conocimientos de los alumnos, condiciones de trabajo, nivel de organización de los alumnos, cantidad de alumnos del grupo, etc.

En segundo o tercer año, los alumnos podrán trabajar en mesas de a cuatro, dos contra dos, e ir dejando registro escrito de sus argumentos (erróneos, incompletos, acabados) para ponerlos a discusión en una futura instancia colectiva en una tabla como la siguiente:

| Carta que salió | | Carta que ganó | ¿Por qué ganó esa carta? |
|---|---|---|---|
| Equipo 1 | Equipo 2 | | |
| | | | |

Al estar realizándose el juego en varios equipos en forma simultánea, el propósito de esta tabla es que el docente pueda tener un registro de lo que está sucediendo a la interna de cada equipo. Este registro será un punto de apoyo para intervenir en los equipos o seleccionar decisiones de los alumnos para una discusión colectiva donde es el docente quien irá registrando en el pizarrón los argumentos y estrategias utilizadas. Por otro lado, estas anotaciones, y el posterior trabajo con ellas, pretenden configurar al cuaderno de clase como una herramienta verdaderamente útil para el aprendizaje al ser compartido con el maestro y el resto de sus compañeros de clase y ser reutilizado por el alumno cuando sea necesario.

A modo de presentación de posibles situaciones que pueden surgir –en cada mano– se anticipan algunas de ellas. Esta tarea de anticipar distintas estrategias de los alumnos permite considerar diversas situaciones de clase y prever intervenciones docentes a realizar ante cada uno de ellas según su propósito de enseñanza.

Los niños, enfrentados a decidir qué carta es mayor, podrían utilizar múltiples estrategias de resolución. En ese sentido, algunos podrían apoyarse para validar sus respuestas en las representaciones gráficas del número. Por ejemplo, enfrentados a decidir quién tiene la carta con un número mayor entre $^{1}/_{4}$ y , se podría empezar por reconocer que esta segunda carta representa $^{1}/_{2}$. Después de validar, por ejemplo, a través de un pliegue conveniente que esa carta corresponde a un medio, se podría representar el cuarto en el registro gráfico y en la misma unidad que el medio para observar que la cantidad de superficie obtenida es menor a la superficie pintada y poder concluir que un cuarto es menor que un medio, por ende, se lleva ambas cartas de la mesa el que tiró la carta con la representación gráfica del medio.

En caso de que ambas cartas sean fracciones, se las podría representar gráficamente en una misma unidad y comparar superficies como en el caso anterior, o concluir que $^{1}/_{4}$ es menor que $^{1}/_{2}$ porque se necesitan 4 de esas partes para armar una unidad mientras que con $^{1}/_{2}$ se necesitan 2. Entonces, las partes de $^{1}/_{4}$ son más chicas que las de $^{1}/_{2}$.

Dependiendo de los conocimientos de los niños, algunos podrían poner en juego que ante dos fracciones con igual denominador es mayor la que tiene numerador más grande. Se presenta otra estrategia, más elaborada, plausible que surja donde se utiliza fracciones equivalentes que podrían ser familiares para los niños. Enfrentados a decidir sobre quién levanta el montón de cartas si surgen $^{4}/_{8}$ y $^{1}/_{4}$ se podría razonar del siguiente modo: $^{4}/_{8}$ es lo mismo que $^{2}/_{4}$ porque ambas provienen de repartos equitativos de 4 alfajores entre 8 personas. Y además, como $^{2}/_{4}$ y $^{1}/_{4}$ tienen igual denominador se puede afirmar que $^{2}/_{4}$ es mayor a $^{1}/_{4}$ para concluir que 4/8 es mayor a $^{1}/_{4}$. En este caso, algún niño podría argumentar que $^{4}/_{8}$ es mayor a $^{1}/_{4}$ porque 4 es mayor a 1 y también 8 es mayor a 4. Frente a este argumento no válido el docente podría tomar nota y presentarlo posteriormente a la clase para discutirlo colectivamente y traer al aula las fracciones $^{2}/_{10}$ y $^{1}/_{2}$ para mostrar limitaciones en dicha estrategia. No se pretende estudiar en este nivel cuáles son esas limitaciones, pero sí es posible considerar presentar la equivalencia entre las fracciones.

Otra estrategia que pueden utilizar en este caso es que $^{1}/_{8}$ es la mitad de $^{1}/_{4}$, entonces para tener $^{1}/_{4}$ necesito $^{2}/_{8}$ y para tener $^{2}/_{4}$ necesito $^{4}/_{8}$, concluyendo que es lo mismo.

Continuando con posibles estrategias que los alumnos podrían poner en juego para determinar quién levanta el montón de cartas, enfrentados a las cartas 1 $^{1}/_{2}$ y $^{3}/_{4}$, podrían recurrir a comparar con un entero y argumentar que 1 $^{1}/_{2}$ es mayor a $^{3}/_{4}$ porque la primera carta es mayor a 1 y la segunda no llega a 1. Tal vez podrían argumentar que $^{3}/_{4}$ no llega a 1 porque "de 4 partes iguales tomo tres  y me falta una parte más para llegar a 1". En caso de que algún alumno no refiera a partes iguales o asocie a un contexto ("como 6" en lugar de "elijo 3" o "me sirven 3") en su argumento, el docente podría tomarlo para poner a debate esos aspectos con toda la clase en un trabajo colectivo.

Es de destacar el valor de este problema para la comprensión de los números racionales ya que ofrece a los alumnos la posibilidad de transitar y relacionar distintas representaciones de un mismo número.

## Problema 2

¿Qué estrategias utilizamos para comparar números racionales?

Al finalizar el trabajo con el juego anterior, a modo de síntesis, se podría solicitar a los alumnos la elaboración de una cartelera o una tabla en el pizarrón con todas las reglas expuestas por ellos para comparar números racionales. Tomando como ejemplo las estrategias surgidas para comparar escrituras se podrían poner a discusión nuevamente con toda la clase para observar en este caso y concluir cuáles se podrían considerar reglas generales de comparación de fracciones y cuáles funcionan bajo ciertas condiciones. El hecho de que los alumnos reconozcan el carácter de las diferentes estrategias abonará a la construcción de relaciones en torno a los números racionales. Al establecer ciertas relaciones generales como válidas se podrían reutilizar en otras actividades sin necesidad de justificarlas cuando se vuelvan a poner en juego.

Este problema se propone que los alumnos que producen estrategias intenten involucrarse o utilizar otras distintas a las elaboradas por ellos mismos para que todos puedan trabajar con las estrategias de los distintos compañeros de clase. Esto hará que se les pueda preguntar a todos los niños de la clase por parejas de números racionales para que verifiquen si determinada estrategia funciona siempre o pedirles ejemplos para cada estrategia consensuada.

# Capítulo 3: Operaciones con números naturales en el Primer Ciclo

## 3.1 Consideraciones curriculares

### a. El trabajo con las operaciones en el Primer Ciclo

Desde los inicios de la escolaridad, la escuela primaria se ha ocupado de enseñar las cuatro operaciones básicas, y, durante muchos años, estuvo centrada en el cálculo tanto con números naturales como racionales y particularmente en los algoritmos convencionales para cada una de ellas. Hoy, desde la perspectiva de enseñanza que se plantea en el Programa 2008 "saber" una operación implica tanto poder usarla en los problemas que resuelve como poder realizar los cálculos que se requieren pudiendo validar los procedimientos utilizados y los resultados obtenidos a partir de las propiedades de cada una de ellas.

Los estudios de Vergnaud sobre el aprendizaje de conceptos, mostraron la relevancia de proponer su enseñanza desde la resolución de problemas tal como se ha planteado en la fundamentación. Para este autor, la enseñanza de un concepto requiere considerar diferentes aspectos:

- Un conjunto de situaciones que le den significado.
- Un conjunto de invariantes –objetos, propiedades y relaciones– subyacentes al razonamiento matemático.
- Un conjunto de símbolos utilizados en su representación.

Para el caso de las operaciones con números naturales, los diferentes significados son los que asume cada una de ellas cuando se usan al resolver problemas en diferentes contextos según las magnitudes que intervienen y las relaciones entre ellas.

En cuanto a los objetos, propiedades y relaciones para las operaciones con números naturales, se trata de los *objetos* matemáticos asociados, por ejemplo, las relaciones de composición y descomposición aditiva y multiplicativa de los números naturales; las *propiedades* conmutativa, asociativa y distributiva; y las *relaciones* como multiplicar dos veces por 2 es lo mismo que multiplicar por 4.

Por último, con el conjunto de símbolos para representar estas operaciones se refiere a las diferentes expresiones escritas que pueden usarse para indicarlas.

Al respecto en el PEIP (2008) se explicita: Cuando se habla de operaciones no se hace referencia a “hacer cuentas”. Sino a conocer y poner en juego los conceptos y las relaciones que la operación representa. Para ello se tendrán presentes todos los aspectos involucrados:

- los distintos significados de las operaciones,
- las relaciones entre las operaciones,
- las propiedades de las operaciones y sus relaciones,
- la resignificación de las operaciones en los diferentes conjuntos numéricos,
- la notación de las operaciones,
- los algoritmos,
- los cálculos (pensados, escritos y con calculadora).

Al considerar el conjunto de problemas para el estudio de su aprendizaje, Vergnaud organizó dos campos de problemas, el aditivo y el multiplicativo, que respectivamente refieren a aquellos problemas para cuya resolución se requieran adiciones y sustracciones o multiplicaciones y divisiones. Su gran aporte es que analiza la complejidad de los problemas de acuerdo con las relaciones entre los números involucrados según el contexto. No se trata de que la suma es más fácil que la resta, se trata de que hay dificultades diferentes de acuerdo al tipo de relación que se debe establecer para resolver estos problemas. Por lo tanto, para el alumno hay problemas de resta más fáciles que algunos de suma y otros de sumas más fáciles que algunos de restas. Lo mismo puede pensarse para la multiplicación y división, muchos niños que reconocen la multiplicación como operación para los problemas de proporcionalidad tienen mayor dificultad para reconocerla en los de combinatoria.

Esa organización es útil para la enseñanza pues, además de contar con información sobre la complejidad relativa de los distintos tipos de problemas para su resolución, trabajar con los problemas de cada campo cambiando el lugar de la incógnita permite vincular necesariamente la suma con la resta y la multiplicación con la división. En este sentido, es relevante el análisis matemático de las relaciones, de las informaciones y de las preguntas involucradas en cada problema a abordar; en este proceso el alumno se irá apropiando de modos de pensar, del lenguaje y de los símbolos adecuados.

Los contextos de la vida cotidiana, de otras disciplinas y actividades son la puerta de entrada para dar significado a los números y establecer una determinada relación entre ellos. El maestro elige contextos que dan significado para presentar los problemas, pero estos son parte de su conocimiento didáctico profesional.

En este sentido, Guy Brousseau (1986) plantea que: "La tarea del docente debe ser contextualizar el objeto matemático (en este caso, la operación) en una situación para presentarlo en el aula y luego descontextualizarlo para identificarlo. Después volver a contextualizarlo en una nueva situación como un conocimiento más elaborado” (pág. 131).

Al proceder de este modo, en sucesivas instancias de contextualización y descontextualización, los alumnos avanzan en la construcción de ese objeto matemático. En este caso las operaciones: sus significados, sus propiedades, las diferentes relaciones numéricas y sus distintas representaciones. De este trabajo irán derivando diferentes conocimientos según las elecciones que haya hecho el docente de los contextos de los problemas que presenta en el aula.

Conviene aclarar que el maestro no enseña los significados ni tampoco los contextos como tales. Tanto unos como otros forman parte del conocimiento didáctico profesional del docente y le permiten elegir convenientemente el conjunto de problemas a presentar.

La enseñanza del cálculo requiere de promover situaciones para que los alumnos desplieguen sus conocimientos y pongan a prueba diferentes hipótesis a través de distintas estrategias de resolución. En principio, es necesario promover la construcción de repertorios de cálculos -listas elegidas por el docente- que los alumnos irán memorizando progresivamente. Luego esos cálculos permitirán elaborar nuevos cálculos y estrategias de cálculo mental exacto y aproximado. Por último, también darán lugar a construir los algoritmos. Según Broitman (1999): "Es posible abordar la construcción del algoritmo a partir de los cálculos mentales iniciales producidos por los alumnos. Esto implica postergar el estudio de los algoritmos para cuando los alumnos han desplegado ya estrategias diversificadas de cálculo mental” (pág. 22).

El cálculo mental potencia los aprendizajes. Es una herramienta potente para familiarizarse con los números, el sistema de numeración decimal, las operaciones y los procesos de pensamiento matemático.

El hábito de confrontar procedimientos, de expresar y explicar lo realizado, de analizar errores o ventajas de estrategias desplegadas, va instalando un ambiente reflexivo respecto a los distintos modos de realizar correctamente un cálculo, de conquistar procedimientos más económicos, respetando la “comodidad” de cada niño con aquellos que adopta. El algoritmo convencional de cálculo escrito aparecería, entonces, como el último paso de un proceso de construcción de algoritmos cada vez más económicos (de menor cantidad de pasos). (Chemello, 1995)

Las propiedades de las operaciones cobran sentido en la enseñanza del cálculo pues son las que permiten validar o no los diferentes procedimientos de cálculo.

El maestro en su planificación intencional de la práctica del cálculo mental en el Primer Ciclo, así como en los procedimientos que los alumnos van construyendo por sí mismos, observará cómo al abordar problemas se van construyendo procedimientos de cálculo en los que está involucrado el uso de las propiedades.

Recordamos que las propiedades de la suma son:

- la conmutativa 3 + 7 es lo mismo que 7 + 3
- la asociativa 2 + 3 + 5 = 5 + 5 = 10 y también 2 + 3 + 5 = 2 + 8 = 10.

Y que las propiedades de la multiplicación son:

- la conmutativa 7 x 2 = 2 x 7
- la asociativa 2 x 3 x 5 = 6 x 5 = 30 y también 2 x 3 x 5 = 2 x 15 = 30
- la distributiva de la multiplicación respecto a la suma 3 x 24 = 3 x 20 + 3 x 4 = 60 +12 = 72
  porque al multiplicar 3 x 24 descomponemos el 24 en 20 + 4

- la distributiva de la multiplicación respecto a la resta 4 x 24 = 4 x 25 - 4 x 1 = 100 - 4 = 96
  porque al multiplicar 4 x 24 escribimos el 24 como 25 - 1

Muchas veces los niños usan en sus procedimientos propiedades sin tener conciencia de que realizan "*transformaciones*" que responden a reglas que tienen valor matemático. Se denominan *teoremas en acto*[1] (Vergnaud, 1990, págs. 402-441).

Los niños los irán incorporando, tras sucesivas explicitaciones no formales en un largo proceso, con lo que adquirirán prácticas claves para la comprensión de las propiedades y en especial para la propiedad distributiva que ofrece dificultades inclusive en el Ciclo Básico de Enseñanza Media.

## b. Avances en el Primer Ciclo

### ¿Qué comprende el trabajo con los problemas en el Primer Ciclo de Enseñanza Primaria?

En relación con los problemas a plantear a los niños, es posible considerar su complejización en función de los distintos elementos de los mismos analizándolos en términos didácticos. Para ello, es interesante considerar la noción de variable didáctica de la fundamentación.

El análisis de los problemas a través de sus estructuras que se presentará más adelante permite al docente formular variantes de ellos cambiando el lugar de la incógnita; secuenciarlos en función de su complejidad, promover en la clase el intercambio y la discusión de los alumnos sobre los diferentes procedimientos personales utilizados; promover distintos cálculos y apelar a los repertorios de cálculo mental.

Los niños en el Primer Ciclo escolar se enfrentarán a problemas del campo aditivo de distintas categorías y en particular en segundo y tercero del tipo composición de transformaciones o de comparación. Se espera que los niños resuelvan con procedimientos que irán avanzando desde gráficos, dibujos, conteo, o sobreconteo, hacia el uso del cálculo mental con diferentes procedimientos escritos.

[1] Para Vergnaud "Teorema en acto" refiere al uso de hecho, sin explicitar, de proposiciones verdaderas en la teoría (por ejemplo: la propiedad conmutativa).

En cuanto a los problemas del campo multiplicativo, es importante precisar que los niños también pueden resolverlos con variados procedimientos que incluirán estrategias artesanales como los dibujos, o el conteo, la suma o la resta y diferentes escrituras hasta arribar a alguna forma de algoritmo convencional apelando a recursos del cálculo mental y al uso de repertorios incorporados a su memoria de largo plazo.

### ¿Qué comprende el trabajo con el cálculo en el Primer Ciclo de la Enseñanza Primaria?

El manejo de las variables didácticas por parte del docente es un recurso para promover el avance en los procedimientos producidos por los niños, en el cálculo mental y en la dirección de cálculos eficaces y más económicos hacia la práctica de los algoritmos convencionales. Por otra parte: "Los aprendizajes y las competencias desarrolladas en las actividades de cálculo mental promueven avances en la capacidad y creatividad en la resolución de problemas" (Parra, 1997).

La práctica del cálculo mental desarrolla competencias matemáticas: intuir relaciones y vincular datos por composición o por descomposición, anticipar resultados intermedios favorables, aplicar en los "hechos" propiedades, cultivar un sentido numérico, autocontrol al validar la pertinencia del resultado obtenido, realizar estimaciones. Por ejemplo: 24 = 2 x 10 + 4. No obstante, veamos otras posibilidades para pensar el 24 en función del problema planteado:

- 12 y 12 si el objetivo es tomar la mitad,
- 25 – 1 si deseo multiplicar 24 por 4,
- 21 + 3 si hoy es martes y quiero saber qué día de la semana será dentro de 24 días,
- 6 x 4 si se quiere prever cuántos paquetes de 6 jabones se pueden armar.

Es muy importante que el niño en la escuela sienta que los cálculos son recursos útiles para resolver problemas y se familiarice con ellos. Para ese fin habrá que promover que los niños, ante una situación, analicen los datos, busquen los procedimientos que perciban como más útiles, discutan con sus pares sus elecciones y analicen su pertinencia.

Desde los primeros años, antes de aprender el algoritmo de la suma, los niños pueden resolver 28 + 23, apelando a los repertorios de escrituras equivalentes a descomponer números utilizando el 10 y el 1. Descomponiéndolo mentalmente en 10 + 10 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 10 + 10 + 1 + 1 + 1 = 40 + 11 y realizando 40 + 10 + 1, obteniendo 50 + 1 = 51; lo que requiere que el niño tenga incorporada la suma de dígitos y la suma de decenas. En la medida que avanza en la suma de dígitos, irá guardando en su memoria de largo plazo repertorios que tendrá “disponibles” para otros cálculos.

En segundo y tercero continuará progresando en la integración de repertorios en su memoria de largo plazo. Si el problema es 29 x 3 podrá realizar mentalmente 30 x 3 = 90 y restará 3 obteniendo 87.

En cuanto al cálculo con calculadora, a partir de primer año, una vez que los niños ya conocen los signos "+, -, =" pueden utilizar la calculadora por sus propios medios. Consiguen resolver problemas con cálculos sencillos de sumas y restas, así como controlar o corregir resultados de cálculos mentales o escritos.

Puede ser también un medio para trabajar las estrategias de cálculo mental y las propiedades de las operaciones que son objeto de estudio en cada ciclo. Desde los primeros años se pueden plantear problemas que permitan analizar las relaciones entre operaciones inversas.

Con respecto al avance en los procedimientos para calcular multiplicaciones, es en segundo año cuando el docente va a introducir el signo X como escritura sintética de las sumas iteradas de sumandos iguales que producen los niños. Por ejemplo, si los niños están frente al problema de interpretar mensajes con distintos cálculos, para 4 + 4 + 4 + 4 + 4 podrán decir: *“Sumás 5 veces el número 4”, “Es 5 veces 4”, “Es 4 repetido 5 veces”, o “Es 4 x 5”*

Y en el cierre de la clase se podrá arribar a la conclusión: *“Cuando sumas varias veces el mismo número, se puede usar el signo de X”.* Cuando los niños, en segundo año ya conocen las escrituras multiplicativas, se espera que puedan utilizarlas.

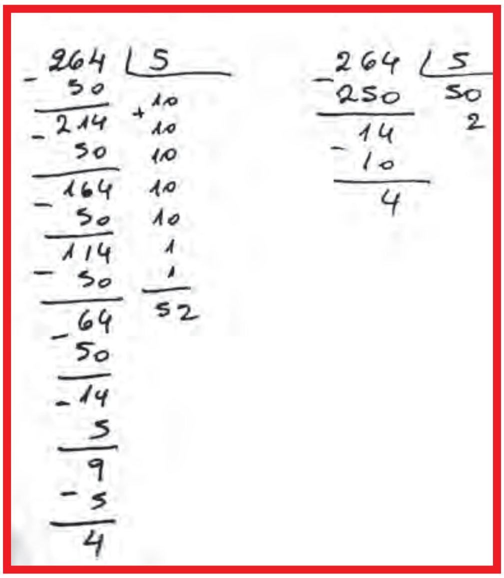
En tercero se abordarán todos los productos de los números del 1 al 10, para lo cual es recomendable el trabajo con la tabla pitagórica y, dado que recién entonces se indica trabajar con la propiedad distributiva, se podrán proponer multiplicaciones de números de varias cifras por una. Se puede completar utilizando variadas estrategias cada una de las cuales lleva implícita una o más propiedades de la multiplicación y de los números involucrados

Para el caso de la división, si bien pueden abordarse desde nivel inicial y primer año problemas de reparto y agrupamiento proponiendo realizar un reparto equitativo de “15 crayones a tres niños” y luego contar el número de crayones recibidos por cada uno, o “Con 15 crayones, colocar 3 en cada caja”, los niños irán resolviendo con dibujos, rayitas, la suma iterada o la resta iterada.

A partir de segundo año se puede ir complejizando utilizando otras variables: números más grandes y sin material a disposición y es posible que comiencen a utilizar la multiplicación, con lo que se puede debatir para poner en evidencia la economía aportada por el recurso de la multiplicación.

A partir de tercero es conveniente avanzar hacia “el algoritmo desplegado de la división”, que está asociado a procedimientos de suma o resta iteradas, encuadramientos por múltiplos sucesivos del divisor u otras estrategias apropiadas por los alumnos.

El algoritmo convencional de la división no está ligado al trabajo con cálculo mental que se propone desplegar desde primer año pues implica “separar” cada cifra, descomponerlo en lugar de considerar el número de manera global. Así, si queremos que ese algoritmo aparezca como la posibilidad de usar lo aprendido anteriormente –la multiplicación y la división por 10, 100 entre otros–, lo coherente es favorecer la utilización de un algoritmo “desplegado” que incluya la escritura de productos parciales y de restas intermediarias, en el cual se ponen en juego las relaciones entre la división, la multiplicación y la resta. Por ejemplo:



Si bien se muestran dos algoritmos desplegados distintos ante el mismo cálculo, los niños en la clase muy probablemente desplegarán otros. El maestro “no enseña el algoritmo desplegado”, lo estimula, y los niños generan algoritmos diferentes liderando su proceso de comprensión y aproximación hacia algoritmos más económicos.

## c. Contenidos programáticos y perfiles

Al analizar en el Programa 2008 los contenidos programáticos correspondientes a Operaciones, los podemos organizar según que se refieran a los significados, al cálculo o al uso de propiedades.

| Contenidos del programa 2008 | |
|---|---|
| **3 años** | La adición y la sustracción en contextos cotidianos. |
| **4 años** | La adición y la sustracción en contexto lúdico. El reparto en un contexto cotidiano. El cálculo pensado con dígitos. |
| **5 años** | La adición y la sustracción en contextos matemáticos.<br>**El cálculo pensado.**<br>- El anterior y siguiente. - Los dobles. |
| **Primer año** | **La adición y la sustracción en distintos contextos.**<br>**El significado de las operaciones.** - Las transformaciones con la incógnita en estado final *(agregar, quitar)*<br>*La composición de dos medidas (unir, separar). No se explicitan en el PEIP.*<br>**La representación simbólica:** signos de +; - ; =.<br>**La propiedad conmutativa** de la adición con números naturales. Algoritmos.<br>**La multiplicación y la división.** - El significado intuitivo de las operaciones.<br>**La proporcionalidad.** - La relación de proporcionalidad: doble-mitad.<br>**El cálculo pensado.** - La composición y descomposición aditiva. - Los complementos al 10. |
| **Segundo año** | **La adición y la sustracción.**<br>**El significado de las operaciones.** - Las transformaciones con la incógnita en distintos lugares de la igualdad. - La composición de transformaciones.<br>Las situaciones de combinar, igualar y comparar.<br>La representación simbólica: signos de x; : ; =.<br>**La propiedad asociativa. La propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición.**<br>La problematización de los algoritmos convencionales de la adición y de la sustracción.<br>**La multiplicación y la división.**<br>**Los distintos significados de las operaciones.** - El isomorfismo de medidas (proporcionalidad). - El producto de medidas (combinación). - El espacio único de medidas (producto escalar).<br>**La proporcionalidad.** - *producto escalar. No se explicita en el programa.* La relación de proporcionalidad: tercio-triple; cuarto-cuádruplo y quinto-quíntuplo. - Las tablas de multiplicar. - El algoritmo de la multiplicación.<br>**El cálculo pensado.** - Los dobles y mitades. - La aproximación a la unidad del orden siguiente. - La distancia entre dos números. |
| **Tercer año** | **La adición y la sustracción.**<br>- **Las propiedades en los diferentes significados del cálculo.** - La propiedad: existencia del elemento neutro (cero).<br>- **La multiplicación y la división.** - El cálculo con número natural y racional (notación decimal). - La problematización del algoritmo convencional de la división. - Los resultados de las operaciones con números racionales. - Las propiedades: asociativa, conmutativa, existencia del elemento neutro “1” (uno) y el “0” como elemento absorbente de la multiplicación.<br>- **La proporcionalidad.** - La relación entre las tablas de multiplicar: del 2 y 4; del 3, 6 y 9; del 4 y 8; del 5 y 10.<br>- **El cálculo pensado.** - Los intervalos entre decenas y centenas. - La composición y descomposición factorial. - La adición de decenas y centenas a un número cualquiera. - La estimación de resultados de división de números naturales. |

Al analizar el siguiente cuadro en relación con el anterior, de contenidos año a año, se advierte que los perfiles de egreso de tercer año derivan, para cada aspecto, de la secuenciación planteada. Hemos considerados todos los perfiles subdivididos en dos apartados para organizar el texto de modo de tomarlos por separado para suma y resta y para multiplicación y división. En ambos casos hemos considerado tres aspectos: el significado de las operaciones, los cálculos y las propiedades.

| Contenidos programáticos vinculados | Perfil de egreso de tercero |
|---|---|
| **Significados de las operaciones: suma y resta** | |
| Relaciones entre operaciones | Resolver situaciones en las que la variación del lugar de la incógnita permita identificar la relación entre la suma y la resta. |
| Relaciones entre sus términos | Resolver situaciones de cálculo apelando a la modificación de los resultados de suma y resta en función de la variación de sus términos. |
| **Cálculos: suma y resta** | |
| Estrategias personales de cálculo, algoritmos convencionales | Resolver situaciones de cálculo pensado, algorítmico, exacto, aproximado y con calculadora, utilizando estrategias personales o algoritmos convencionales. |
| **Propiedades de la suma** | |
| Propiedades y sus relaciones | Utilizar la propiedad conmutativa y asociativa de la suma en la resolución de cálculos. |
| **Significados de las operaciones: multiplicación y división** | |
| Reparto exhaustivo y equitativo | Repartir en forma exhaustiva y equitativa una cantidad y el resto que resulta de esa situación. |
| Proporcionalidad directa | Resolver situaciones de proporcionalidad directa en relación con los datos disponibles. |
| **Cálculos: multiplicación y división** | |
| Estrategias personales de cálculo, algoritmos convencionales | Resolver situaciones de cálculo pensado, algorítmico, exacto, aproximado y con calculadora, utilizando estrategias personales o algoritmos convencionales. |
| **Propiedades de la multiplicación** | |
| Propiedades y sus relaciones | Utilizar la propiedad conmutativa y asociativa de la multiplicación y la distributiva de la multiplicación respecto a la adición en la resolución de cálculos. |

## 3.2 Familias de problemas para sumar y restar

### a. Significados de la suma y de la resta en problemas de contexto extramatemático

#### ¿Qué tipos de problemas aditivos presentar?

El campo aditivo[2] está formado por las diferentes situaciones que implican adiciones, sustracciones o combinaciones de ambas. Al resolver los problemas del campo aditivo, se reconocen las estructuras de composición, transformación y comparación que dan lugar a distintos tipos de problemas aditivos con distintos significados. Entre ellos, algunos requieren de una suma y otros de una resta y conducen a diferentes tipos de razonamientos con distinto grado de dificultad. En los ejemplos se analizarán algunos de ellos.

[2] En su Teoría de los campos conceptuales Vergnaud plantea que: “Un campo conceptual está constituido por un conjunto de situaciones cuyo dominio requiere la utilización de una variedad de procedimientos, de conceptos y de conocimientos (teoremas) en estrecha relación”.

Estos problemas se enriquecen al incluir la composición de transformaciones y la composición de comparaciones que implican mayor complejidad. Algunos se proponen para el Primer Ciclo y otros, por su dificultad, en Segundo Ciclo.

Los problemas de suma y resta se diferencian en las relaciones entre los números que intervienen y en sus referentes. Se trata de considerar si esos números se refieren a estados (por ejemplo $7 se puede referir a la medida de una cantidad) o a transformaciones (por ejemplo $5 se puede referir a una cantidad que se agrega o a una que se quita a la anterior) y también cuáles son las relaciones entre los números que determina el enunciado.

Por otra parte, para cada significado de la suma y la resta, es posible plantear problemas donde la incógnita cambia de lugar, lo que permite comenzar a establecer con los niños desde temprano las distintas relaciones entre estas operaciones. Para ir arribando a este logro es preciso un trabajo a largo plazo que permita el pasaje por las distintas categorías de problemas.

## ¿Qué entendemos por variar el lugar de incógnita?

Los problemas aditivos que se presentan en el esquema a continuación, son ejemplo de algunos de los problemas posibles dentro de las diferentes clases, por lo que tienen distinto significado y grado de dificultad diferente para los niños. Se han elegido los números, 5, 7 y 12, para todos los problemas, aunque representen cosas diferentes en cada uno de ellos, a los efectos de ver que los cálculos que los resuelven son los mismos; 7 + 5 = 12; 12 – 7 = 5 y 12 – 5 = 7. De esta manera se puede decir que la complejidad para su resolución no está en el cálculo, sino en las relaciones en el problema, tanto en relación al significado como al lugar de la incógnita.

Es importante señalar que, cuando los niños resuelven los problemas, muchas veces los piensan con procedimientos que no remiten a la operación que indicamos inicialmente en el cuadro. Es por eso que agregamos otras escrituras donde indicamos con ... el número que tienen que averiguar.

Veamos los ejemplos del cuadro "Problemas aditivos" (ver pág. 81), para los tres tipos de estructuras de los problemas así como de sus variaciones según el lugar de la incógnita.

¿Cómo los analizamos?

Problemas de composición de medidas.

- En el problema de unión, se conocen las partes, el 7 y el 5 representan medidas. El 12, que es la incógnita, es la medida de la composición de ambas, el dinero que tienen juntos. El cálculo es 7 + 5 = 12.
- En el problema de separación, se conoce una parte y el todo. El número 7 representa la medida de una de las partes y el número 12 representa la medida de la composición de ambas. La incógnita es la otra parte, una medida, el dinero que tiene Agustina. El cálculo es 12 - 7 = 5. Aunque muchos niños suelen pensarlo como una suma, 7 + ... = 12, se trata de una resta con el significado de “complemento”.

Problemas de transformación positiva

- En el primer problema se conoce la medida del estado inicial, $7, y la transformación positiva, $5. Lo que se calcula es la medida del estado final, $12. Leo ahora ha acrecentado su dinero inicial. El cálculo es 7 + 5 = 12.
- En el segundo problema con cambio de incógnita, se conoce el estado final, Leo tiene $12 y la transformación positiva, $5 que le regaló Agustina. La incógnita se encuentra en el estado inicial, lo que Leo tenía al principio. El cálculo que lo resuelve es 12 - 5 = 7.
- En el tercer problema con cambio de incógnita, se conoce el estado inicial, Leo tenía 7 y el estado final, Leo tiene $12. La incógnita se encuentra en la transformación positiva, lo que Agustina le regaló a Leo. El cálculo que lo resuelve es 12 - 7 = 5.

# PROBLEMAS ADITIVOS

**SUMA**

**RESTA**

## ESTRUCTURAS Y SIGNIFICADOS

### 1- COMPOSICIÓN

(unir - separar)

*Dos medidas componen una tercera.*

(Parte 1 + Parte 2 = = Todo)

### 2- TRANSFORMACIÓN

(agregar, quitar)

*Una medida sufre una transformación positiva o negativa y da lugar a otra medida*

($E_i$ T $E_f$ )

### 3- COMPARACIÓN

(diferencia)

Una relación de orden donde se conocen dos medidas y se busca averiguar una tercera.

($M_1$ R $M_2$)

#### UNIÓN

1 SUMA

Leo tiene $7 y Agustina tiene $5. ¿Cuánto dinero tienen los dos juntos?

7 + 5 = ...

#### SEPARACIÓN

1 RESTA

Leo y Agustina tienen $12 entre los dos. Si Leo tiene $7. ¿Cuánto dinero tiene Agustina?

12 - 7 = ...

7 + ... = 12

#### TRANSFORMACIÓN POSITIVA

2 SUMAS

Leo tenía $7 y Agustina le regaló $5. ¿Cuánto dinero tiene Leo ahora?

7 + 5 = ...

4 RESTAS

Leo tiene $12 luego de que Agustina le regaló $5. ¿Cuánto dinero tenía Leo?

12 - 5 = ...

... + 5 = 12

Leo tenía $7 y Agustina le regaló dinero. Ahora tiene $12 ¿Cuánto dinero le regaló Agustina?

12 - 7 = ...

7 + ... = 12

#### TRANSFORMACIÓN NEGATIVA

Leo le prestó 5 a Agustina y ahora tiene 7

¿Cuánto dinero tenía Leo antes?

7 + 5 = ...

.... - 5 = 7

Leo tenía $12 y le prestó $5 a Agustina. ¿Cuánto dinero tiene Leo ahora?

12 - 5 = ...

5 + ... = 12

Leo tenía $12 y ahora tiene $7. ¿Cuánto dinero le prestó a Agustina?

12 - 7 = ...

12 - ... = 7

#### DIFERENCIA

1 SUMA

Leo tiene $7 y Agustina tiene $5 más que él

¿Cuánto dinero tiene Agustina?

7 + 5 = ...

2 RESTAS

Leo tiene $7 y Agustina tiene $12. ¿Qué diferencia de dinero tienen?

12 - 7 = ...

Agustina tiene $12 y Leo tiene $5 menos que ella. ¿Cuánto dinero tiene Leo?

12 - 5= ...

Problemas de transformación negativa

- En el primer problema con cambio de incógnita, se conoce la medida del estado final \$7 y la transformación negativa \$5, el dinero que Leo le prestó a Agustina. La incógnita se encuentra en el estado inicial, el dinero que tenía Leo antes de prestarle a Agustina. El cálculo que lo resuelve es 7 + 5 = 12.
- En el segundo problema, se conoce la medida del estado inicial \$12 y la transformación negativa "Leo le prestó a Agustina \$5". La incógnita está en el estado final, el 7 representa el dinero que le quedó a Leo. El cálculo es 12 - 5 = 7.
- En el tercer problema con cambio de incógnita, se conoce la medida del estado inicial \$12 y la medida del estado final \$7. La incógnita se encuentra en la transformación negativa ¿Cuánto dinero le prestó Leo a Agustina? El 5 representa que se averigua la disminución del dinero de Leo.

Problemas de comparación de la medida de dos cantidades, “más que” y “menos que”

- En el primer problema con cambio de incógnita, reconocemos una comparación cuantificada: “más que”. El 7 es la medida del dinero de Leo y el 5 representa una comparación entre el dinero que tiene Leo y el dinero que tiene Agustina. Se averigua el dinero que tiene Agustina. El cálculo que lo resuelve es 7 + 5 = 12
- En el segundo problema, se conocen las medidas de dos cantidades, Leo tiene \$7 y Agustina tiene \$12. Se trata de averiguar la diferencia entre ambas, cuánto le falta a una para equipararse con la otra. El cálculo es 12 - 7 = 5
- En el tercer problema con cambio de incógnita, el número 12 es una medida (de lo que tiene Agustina) y el 5 representa una comparación cuantificada “menos que”. El 7 representa una medida del dinero que tiene Leo. El cálculo que lo resuelve es 12 - 5 = 7

Problemas aditivos con distintos significados, cambiando el lugar de la incógnita *

A continuación se presentan familias de problemas que abordan distintos significados de la suma y la resta. Estos problemas pueden proponerse a lo largo del Primer Ciclo, en distintos momentos del año, atendiendo a los conocimientos del grupo y en variados contextos.

Hemos elegido agrupar los problemas según los contextos que, en los tres grupos, son conocidos por los niños: calcular los puntos en un juego, en colecciones de figuritas, con precios y con entradas de cine. Es importante tener en cuenta que los contextos ofrecerán distinto grado de dificultad según la familiaridad que reconozcan los niños.

Por otra parte, es central considerar el tamaño de los números –desde una a cuatro cifras– y el significado de las operaciones.

## Problemas en el contexto de juegos con puntaje

Los problemas en el contexto de juegos donde es necesario registrar y calcular el total del puntaje obtenido implican el uso de la suma con el significado de unión. Por ejemplo, para el total de dos o más tiros de un dado o para el total en juegos de emboque en latas con distinto puntaje.

En el caso del Juego de la Oca, como se trata de ir avanzando en una tira ordenada, se pueden presentar, luego de jugar, problemas con transformaciones con significado de avanzar o retroceder o de comparación, como planteamos en la fundamentación, los denominamos problemas de jugadas simuladas y problemas de contexto intramatemático con los mismos cálculos. Por ejemplo, para primer año:

### Problema 1

**1** LA FICHA DE ZORRITO ESTÁ EN EL CASILLERO 10 Y SALIÓ 5 EN EL DADO.

¿A CUÁL CASILLERO TIENE QUE IR?

En este problema, los niños pueden resolver por conteo o sobreconteo apoyándose en el tablero o, si ya conocen algunos cálculos, anticipar el resultado pensando que 10 más 5 es 15 porque al agregar un número de una cifra al 10, se reemplaza el 0 por el número, realizando un cálculo. El 5 aquí, se refiere a una transformación positiva.

### Problema 2

**2** LA FICHA DE LOBITO ESTÁ EN EL CASILLERO 21.

¿QUÉ PUNTAJE TIENE QUE SALIR EN EL DADO PARA QUEDAR EN EL CASILLERO 26?

Se trata de un problema en el que los niños deben averiguar la medida de una transformación positiva. Los niños podrán usar procedimientos similares al caso anterior.

## Problemas en el contexto de colecciones de figuritas

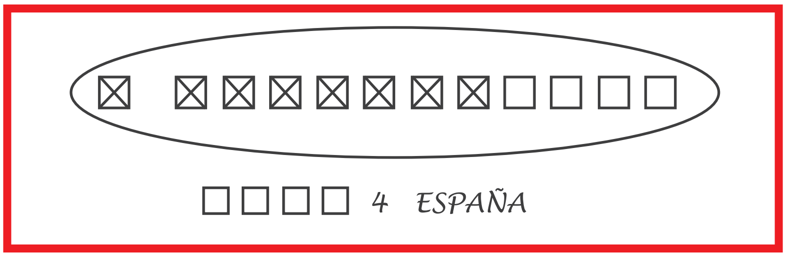
Tanto por sus estructuras como por el tamaño de los números, los problemas de colecciones de figuritas se han pensado para primer año.

¿Qué significados de la suma aparecen en estos problemas? ¿Qué procedimientos utilizan los niños para resolver?

### Problema 1

Mateo colecciona figuritas de fútbol. Tiene 12 figuritas, 8 son de Uruguay y el resto de España. ¿Cuántas figuritas son de España?

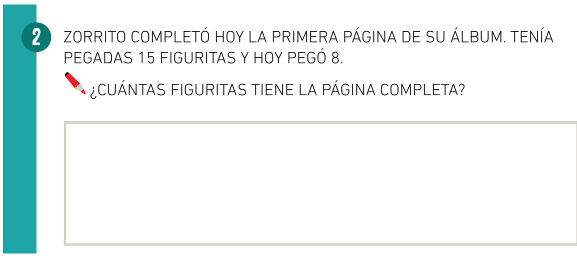
Este problema es de composición de dos medidas obteniendo como resultado otra medida. La incógnita se encuentra en una de las medidas que se componen, el problema es de separación o de con cambio de incógnita, y se resuelve con el cálculo 12 - 8 = 4. Presentada esta actividad a un grupo escolar de primer año, podemos observar un tipo de procedimiento llevado a cabo por algunos niños que representaron gráficamente la colección de 12 figuritas, tacharon las 8 de Uruguay y luego contaron las que quedaban.



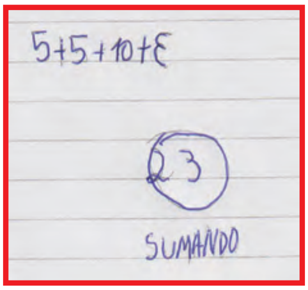

Algunos niños escriben 8 + 4 porque parten de las 8 de Uruguay y le agregan hasta llegar a 12. Resuelven un problema de resta planteando una suma pues se apoyan en el sobreconteo y luego en el conteo a 12.

En este caso, se presenta la posibilidad de vincular un procedimiento con otro para avanzar en las relaciones 8 + 4 = 12; 12 - 8 = 4 y 12 - 4 = 8, por medio de una serie de preguntas que el docente podrá ir formulando: *¿dónde está el 8?, ¿dónde está el 4?, y ¿el 12?, ¿por qué en un procedimiento suman y en otro tachan?, ¿es lo mismo?, ¿por qué?, ¿cómo se forma el 12?, y a partir del 12 ¿cómo tengo el 4? y ¿el 8?*

### Problema 2




En este problema aparece una transformación positiva con la incógnita en el estado final. Este problema se puede resolver por una suma 15 + 8. El 8 representa la transformación y el significado de la suma es “agregar”.




Para resolver esta situación se observa que algunos alumnos utilizaron su repertorio de cálculos memorizados, es decir, se apoyaron en sumas conocidas. Ponen en juego la descomposición aditiva (5 + 10 y 5 + 3), luego utilizan la propiedad conmutativa y finalmente la asociativa. Ellos dicen: “*5 + 5 es 10, + 10 es 20, + 3 es 23*”.

También pueden dibujar las 15 figuritas, palitos o etc. y agregarles 8 más y contar.

### Problema 3

Mateo tenía 12 figuritas. Pierde al jugar primero 5 y después 3. ¿Cuántas figuritas repetidas tiene Mateo ahora?

Se trata de un problema de dos transformaciones negativas sucesivas. Son dos usos sucesivos de la resta con el significado de "quitar" a una cantidad. En el ejemplo propuesto, se parte de un estado inicial representado con 12 figuritas sobre el que operan dos transformaciones negativas: pierde 5 y pierde 3. Las dos transformaciones negativas podrán componerse en una tercera, sumando las pérdidas para arribar a que pierde 8. Se pregunta por el estado final.

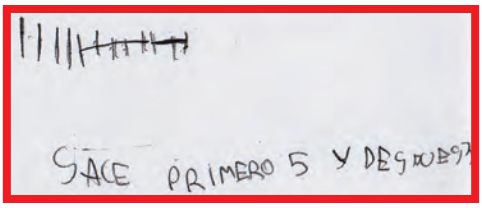
Algunas resoluciones elaboradas por los niños son las siguientes:

Un niño dijo:

“Tiene 4” y explicó: "Lo hice sacando figuritas. Saqué 5 y quedaron 7. Al 7 le saqué 3 más y quedaron 4”.

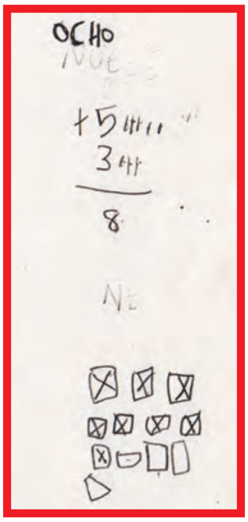
**Procedimiento 1:**

Otros niños representaron en forma icónica 12 figuritas y tacharon primero 5 y después 3. Luego contaron las que quedaron sin tachar.



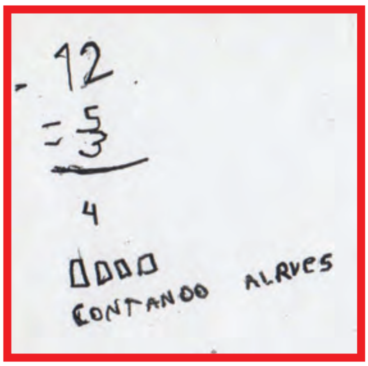

**Procedimiento 2:**

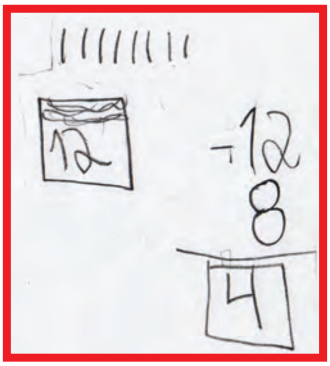
En otro grupo, realizaron primero la composición 5 + 3, a través de la suma, luego dibujaron las 12 figuritas y tacharon 8. Finalmente contaron las que quedaron sin tachar.




**Procedimiento 3:**

Algunos realizaron la composición a través del conteo de palitos (8) y luego plantearon la resta 12 - 8. Y otros realizaron dos restas sucesivas 12 - 5 - 3.




**Procedimientos 4 y 5:**

En las dos primeras resoluciones y en la última, los niños usaron el mismo procedimiento ya que los conocimientos que pusieron en juego fueron los mismos, aunque las representaciones fueron distintas. Uno lo hizo por cálculo pensado (procedimiento 1), otro por representación icónica (procedimiento 2) y el último por representación simbólica (procedimiento 5).

En las otras resoluciones (procedimientos 3 y 4) los niños proceden en un principio de la misma forma, componiendo la cantidad que debe ser restada en primer término: utilizan íconos y símbolos numéricos.

Se puede decir que fueron dos formas de resolver. En una primera mirada, los procedimientos pueden parecer variados y heterogéneos, pero al analizarlos vemos recurrencias en las formas de pensar.

### ¿Cómo se podría gestionar la clase para el problema 3?

Luego de que los niños han escrito sus procedimientos, es posible organizar en la clase una reflexión conjunta en la que se analizarán los procedimientos, los resultados y los argumentos para darlos por válidos.

El maestro, la maestra, podrá seleccionar, por ejemplo, los procedimientos de resolución 2, 3 y 4 en los que se usan diferentes operaciones y diferentes representaciones de las cantidades. Podrá plantear: *Vamos a buscar en estos procedimientos dónde está el número de figuritas que perdió Mateo.* Luego de que los niños ubiquen el 5 y el 3 en cada procedimiento –tacha 5 palitos y tacha 3 palitos; suma 5 + 3; dibuja 5 y 3 palitos y los cuenta– ya podrán responder cuántas figuritas perdió Mateo.

Después se propondrá encontrar, en los tres procedimientos, dónde está el número de figuritas que le quedan. Los niños deberán identificar que en el procedimiento 2 está en las figuritas sin tachar, en el procedimiento 3 también se encuentra en las figuritas sin tachar y en el procedimiento 4 está en el resultado de la resta 12 – 8.

El grupo podrá entonces elaborar la conclusión *este problema se puede resolver haciendo 5 + 3 y luego 12 - 8 o sacando a 12 primero 5 y después 3*", arribando a una sistematización de los conocimientos que circularon en la clase. Así el maestro vincula el conocimiento que quería enseñar con los efectivamente producidos en la clase.

## Problemas en el contexto de compras y ahorros

Para segundo año, es importante seguir presentando a los niños problemas con los significados ya vistos en primero y aumentando el tamaño de los números. Asimismo, plantear otros con nuevos significados como los que se presentan a continuación.

En los ejemplos se presentan números que se refieren a cantidades de dinero. Si bien aquí se trata de números redondos de tres cifras, el maestro los podrá elegir según cuáles sean las sumas y restas que ha planificado abordar.

**Problema 1**

Sol tiene $120 y Guille tiene $170. ¿Cuánto dinero más tiene Guille?

Se trata de un problema que presenta una comparación cuantificada. La relación expresada es $: 170 > 120 y se desea cuantificar cuántos $ más, es decir la relación "más que".

Para muchos niños es difícil interpretar la relación "más que" y difícilmente en sus primeras resoluciones lo resuelvan con una resta. Es común que busquen la solución calculando "a + ...  = c" o "120 +  ... = 170", es decir, "*lo que le falta a Sol para tener lo mismo que Guille*" sin pensar en la relación "c - a = …" o "170 - 120 = …".

Es importante que los alumnos puedan vincular datos de este tipo y comiencen a reconocer relaciones entre suma y resta. El docente, para promoverlas, puede plantear que "*en otro grupo un niño lo resolvió haciendo 170 - 120 =. ¿Les parece que se puede resolver así? ¿Por qué?*" y debatir que si se le saca a Guille lo que tiene igual que Sol, lo que queda es lo que tiene de sobra.

### Problema 2

Sol tiene $120. Gasta $50 en un helado y su abuela le regala $20. ¿Cuánto dinero tiene Sol ahora?

En este problema, el estado inicial del dinero de Sol es $120 y operan dos transformaciones: una negativa (gasta $50) y otra positiva (la abuela le regala $20). La incógnita es el estado final del dinero que tiene Sol.

Es previsible que los niños lo realicen progresivamente en dos pasos: "*Tenía $120, gastó 50 entonces le quedan 120 - 50 = 70 pesos*"; segundo paso, "*la abuela le regaló $20 entonces finalmente tiene 70 + 20 = 90 pesos*".

Es menos probable que los niños en el Primer Ciclo compongan las dos transformaciones y piensen que si gasta 50 y recibe 20 compensa una parte del gasto con lo que recibe y entonces resulta como si solo hubiera gastado 30. Es decir, con T- = $50 y T+ = $20 se obtiene una transformación negativa T´- = $30, consecuencia de calcular 50 - 20. En ese caso 120 - 30 = 90 pesos. Este procedimiento es válido pero es más complejo por tratarse de la composición de dos transformaciones de distinto signo.

### Problema 3

Sol quiere comprar un libro que cuesta $390. Ya juntó $170. ¿Cuánto dinero le falta para poder comprar el libro?

El problema 3 es un problema de composición de medidas. La incógnita está en una de las partes, el significado de la resta es "separar". Algunos niños podrán resolverlo por sobreconteo de 10 en 10 o relacionando la suma 170 + . = 390 como hicieron con el problema 1, pensado para primer año del conteo de figuritas. En ese caso, por tener el problema números de una cifra, podían hacer sobreconteo de 1 en 1. Aquí además de cambiar la complejidad para segundo año por el tamaño de los números propuestos (variable didáctica) se podría observar si hay más niños que los asocian también con una resta.

También pueden presentarse luego problemas de este tipo en contexto intramatemático:

### Problema 4

30 + …. = 172 85 + …. = 115 50 + …. = 140

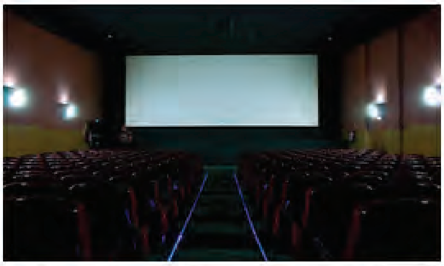
¿Cómo pueden hacer fáciles estos cálculos?

Quienes tienen conocimiento experto reconocen la resta, pero este es un largo proceso en el cual el maestro frente a estas propuestas debe organizar la interacción entre los alumnos y confrontar resoluciones para que puedan reconocer procedimientos eficaces.

## Problemas en el contexto: el cine y la venta de entradas

Estos problemas por el contexto, por los significados y por las operaciones que involucran están pensados para tercer año.

### Problema 1



La sala de cine de mi ciudad tiene capacidad para 180 personas. Para el estreno de una película se vendieron 95 entradas en la boletería y 50 por Internet.
¿Cuántas entradas quedaron sin vender?

A) 35
B) 85
C) 145
D) 325

*Actividad extraída de la Evaluación en línea (2016)*

### Problema 2

Para la función del sábado se vendieron 145 entradas y para la del domingo se vendieron 95. ¿Cuántas entradas más se vendieron el sábado que el domingo?

¿Cuál es el cálculo que no resuelve este problema?

a) 145 + 95 = ….  b) 145 - 95 = ….  c) 95 + …. = 145

### Problema 3

El viernes hubo dos funciones. En la primera función se vendieron 140 entradas y en la segunda función se vendieron 45 entradas menos. ¿Cuántas entradas se vendieron en total el día viernes?

En el problema 1, se conoce el estado inicial, dos transformaciones del mismo signo y la incógnita está en el estado final.

El problema 2 es una situación de comparación. En este tipo de problemas los alumnos tienen que interpretar los cálculos.

El 3 es un problema más complejo, pues conduce naturalmente a un procedimiento de resolución en dos pasos: calcular cuántas entradas se vendieron en la segunda función y luego sumar las ventas en ambas funciones.

El maestro podrá promover las argumentaciones de los niños planteando en la puesta en común preguntas que lleven a los niños a reflexionar sobre lo que hicieron. Por ejemplo, *¿cómo lo pensaron?, o ¿en qué se parecen los procedimientos de Leo y Agustina? y ¿Ana, por qué te parece que está bien lo que hiciste?* La explicitación que los niños hagan de las relaciones que establecieron permitirá al maestro conducir la elaboración de conclusiones y la justificación de sus respuestas.

## b. Distintos tipos de cálculos para sumar y restar

Con relación al cálculo es necesario, en primer lugar, diferenciar el cálculo exacto del aproximado y el cálculo pensado del automatizado o algorítmico.

Por una parte, en función de la situación, se podrá requerir la realización de un resultado exacto, o de un cálculo aproximado o una estimación útil del resultado. La estimación cumple, en relación a la operación a efectuar, una función de "control" de la pertinencia del resultado que finalmente se obtenga por un cálculo automatizado o bien pensado.

Llamaremos cálculo automatizado o algorítmico a aquel que se realiza con un procedimiento fijo, independiente de los números intervinientes, en la aplicación de una rutina establecida (un *algoritmo* convencional) así como en el uso de una calculadora, una computadora. Cálculo pensado o mental se refiere a aquel procesado mediante una reflexión, generando un procedimiento a la medida de los números que intervienen, no necesariamente replicable en otras situaciones. Esto implicará crear procedimientos correctos, no rutinarios, para producir el resultado. El cuadro siguiente (Dirección de Gestión Curricular, 2009) resume lo planteado.

| Características a considerar | Cálculo algorítmico | Cálculo mental |
|---|---|---|
| **Tipos de resultados** | Exactos. | Exactos o aproximados. |
| **Datos numéricos (I)** | | |
| Datos numéricos (II) **depende de ellos pues, son analizados para determinar** los caminos a seguir. Es independiente de ellos. | Considera sus cifras aisladas. | Los considera de manera global. |
| **Escritura de procedimientos** | Es necesaria. | Es necesaria en muchos casos y muy conveniente en otros para explicitar la manera de pensar. |
| Apelación a propiedades de las operaciones | Una vez automatizadas no es necesario tenerlas en cuenta. | |

Las propiedades, en general, se traducen en estrategias de resolución.

Los conocimientos que se construyen a partir de los distintos tipos de cálculo se nutren recíprocamente. Es importante propiciar instancias que vinculen el cálculo mental con el algorítmico y con la calculadora; proponer problemas que den oportunidad de estimar (y controlar), de aproximar y de lograr un resultado exacto. El intercambio de los niños en los equipos, en la discusión colectiva entre sí y con el maestro aporta en un largo proceso al desarrollo de competencias de cálculo.

## Problemas para calcular sumas y restas y variar sus "términos"

Las situaciones que se presentan en una familia de problemas, focalizadas en los cálculos, atraviesan todos los perfiles y se inscriben en el marco general del eje operaciones en el presente trabajo. Los problemas que permiten construir el significado de las operaciones y el sentido del cálculo están íntimamente relacionados. Es en ese marco que la focalización y la práctica de los distintos modos de calcular cobra sentido.

Consideremos diferentes familias de problemas para promover diferentes tipos de cálculo indicados en ese perfil y en el de establecer relaciones entre sus términos.

### ¿Qué tipos de problemas presentar para desarrollar estrategias de cálculo?

El trabajo con el cálculo pensado implica trabajar con los niños con diferentes propósitos. En una primera etapa, en la construcción de un repertorio de sumas memorizadas (ver el cuadro en páginas 119 y 120). Algunos de los problemas más fértiles que se pueden plantear para que los niños construyan ese repertorio son en el contexto de juegos. En cada caso se obtendrá una lista de cálculos que se podrá utilizar como punto de partida para la segunda etapa.

En una segunda etapa, se podrán retomar las listas de cálculos como punto de partida para la presentación de propuestas que impliquen transformar y analizar nuevos cálculos a partir de los conocidos, variar los términos en cálculos y analizar regularidades, para usar la calculadora y avanzar hacia el cálculo algorítmico.

## Problemas para construir un repertorio de sumas y restas

### ¿Qué problemas presentar?

Muchos son los juegos que permiten construir repertorios de cálculo, es decir, listas que luego de producidas durante el juego serán usadas en diferentes actividades a fin de que los niños las vayan memorizado.

Por ejemplo, el siguiente que da lugar a encontrar los distintos procedimientos que llevan a determinar los complementos a 10 y, posteriormente, memorizarlos.

**Problema 1**

**LA CAJITA DE LOS DIEZ**

**MATERIALES**

- UNA CAJA DE FÓSFOROS GRANDE CON UN TABIQUE QUE DIVIDE LA PARTE MÓVIL EN DOS PARTES. EL TABIQUE DEBE TENER UN AGUJERO O RANURA
- DIEZ POROTOS POR CADA GRUPO DE NIÑOS

**REGLAS DE JUEGO**

ENTRE 3 Y 5 JUGADORES.

A CADA GRUPO SE LE ENTREGA UNA CAJA DE FÓSFOROS CON DIEZ POROTOS EN SU INTERIOR.

POR TURNO, CADA JUGADOR MUEVE LA CAJA CERRADA PARA PROVOCAR EL PASAJE DE POROTOS DE UN LADO A OTRO DE LA CAJA. LUEGO LA APOYA SOBRE LA MESA, LA ABRE HASTA LA MITAD, CUENTA LOS POROTOS QUE QUEDARON A LA VISTA Y PIENSA CUÁNTOS HAY EN LA MITAD TAPADA. EL RESTO DEL GRUPO EXPRESA SI ESTÁ O NO DE ACUERDO Y SE ABRE LA CAJA PARA VERIFICARLO. SI LA ANTICIPACIÓN ES CORRECTA, EL JUGADOR GANA UN PUNTO.

SE REALIZA REGISTRO DEL CÁLCULO Y PASA EL TURNO AL SIGUIENTE COMPAÑERO.

DESPUÉS DE CUATRO VUELTAS, GANA EL JUGADOR QUE ANOTÓ MÁS PUNTOS.

ZORRITO Y LAS CUENTAS

A continuación, el docente solicita a los chicos que le dicten los distintos cálculos que fueron registrando y se colocan en un papelógrafo a la vista de todos.

Este juego, pensado para primer año, puede realizarse también en segundo año, cambiando el valor de los porotos. Si cada poroto vale 10, se obtendrá al finalizar el juego la lista de sumas que dan 100 o los complementos a 100.

Luego, se podría plantear el juego de adivinanzas siguiente que requiere apelar a las relaciones entre sumas y restas. Dado un sumando y la suma, hay que "adivinar" el otro sumando. Por ejemplo:

**Problema 2:** Juego de adivinanzas

"Pienso un número, le agrego 30 y obtengo 80, ¿qué número es?"

Calcular la cantidad inicial lleva a usar la resta en un problema donde se agrega. Esto no significa que la resta sea el único modo válido de resolver el problema, de hecho algunos niños suman, es decir, buscan el complemento. Es central luego discutir los procedimientos antes de pasar a una segunda adivinanza. Algunos van contando desde 30 de 10 en 10, otros dicen que como se agregó 30 para tener 80 tienen que sacar 30 para volver al número que tenían y otros dicen que como 30 y 30 son 60 y con 20 más 80, agregaron 30 y 20 que son 50.

**Problema 3**

ESCRIBO CON +

MATERIALES

- DOS DADOS
- UNA TABLA DE REGISTRO POR JUGADOR

REGLAS DE JUEGO

ENTRE 2 Y 4 JUGADORES

CADA JUGADOR TIRA DOS DADOS Y REGISTRA LA SUMA Y EL RESULTADO EN LA TABLA.

GANA EL QUE TIENE MÁS PUNTOS LUEGO DE 4 TIRADAS.

| DADO 1 | DADO 2 | SUMA |
|---|---|---|
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |

1 ZORRITO ANOTÓ EN SU TABLA 4+1 Y 1+4 Y DICE QUE LE DIO EL MISMO RESULTADO ¿PUEDE SER?

¿EN QUÉ SE PARECEN ESTAS SUMAS?

ESCRIBE OTRAS SUMAS QUE SE PAREZCAN A ESTAS.

ZORRITO Y LAS CUENTAS

18

De este juego se pueden recuperar las sumas desde 1 + 1 hasta 6 + 6.

Se puede luego, en una reflexión sobre el juego, realizar diferentes preguntas para obtener conclusiones. Por ejemplo, en segundo año, se podría preguntar:

**¿Tienen en su lista sumas con los mismos números?, ¿cómo son sus resultados?, ¿por qué les parece que pasa eso?*

**¿Tienen más de una suma con resultado 5? ¿Y 6? Hagamos una lista.*

**¿Cómo se pueden ubicar en esta tabla los resultados que tienen?*

**¿Cuántos resultados son pares y cuántos impares?*

**¿Qué deben cumplir ambos números para que su suma sea un número par? ¿Y para que resulte impar?*

Otras alternativas de repertorios se podrían obtener cambiando las reglas del juego.

Por ejemplo, para "*Tirar dos dados, escribir los dos números que pueden formar (p. ej. 51 y 15) y sumarlos"* los resultados serán 22, 33, 44, hasta 132.

Una variable didáctica del juego es también cambiar los valores de un dado presentando, por ejemplo, un dado cuyos números sean 10, 20, 30, 40, 50, 60 y combinar las tiradas con dados de un dígito. Para "*Tirar dos dados uno rojo y uno blanco, en el rojo los puntos valen 10, y restarlos"* los resultados serían los complementos del dígito a un número redondo. 10 - 1, 10 - 2, 10 - 3, etc. 20 - 1, 20 - 2, 20 – 3, etc. Se podrá observar que al restar 1 se obtienen 9, 19, 29, etc., y al restar: 2, 8, 18, 28, etc.

Es fundamental que, de acuerdo a los resultados obtenidos en el juego, el docente formule preguntas que promuevan la reflexión sobre los cálculos y sobre los resultados obtenidos.

## Problemas para transformar y analizar nuevos cálculos

### ¿Qué problemas presentar?

Para avanzar con el "cálculo pensado", se pueden proponer problemas intramatemáticos en los que el objeto de estudio son los cálculos mismos.

El trabajo se podrá organizar en pares o en equipos, según la decisión del docente en función de lo más adecuado para su clase. Los equipos registrarán en cuadernos sus procedimientos y los resultados obtenidos. El docente irá recorriendo el aula y observando. Esto le permitirá al organizar la puesta en común decidir a qué equipos comienza a invitar a presentar sus conclusiones provisorias, de modo que los que tienen dificultades se expresen y participen en el proceso de reorganización de sus procedimientos.

Es importante considerar los variados procedimientos de los niños, actores en un proceso de producción matemática.

**Problema 1**

Calcular mentalmente:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 5 + 9 = ... | 5 + 99 = ... | 15 + 9 = ... | 15 + 99 = ... |
| 7 + 8 = ... | 7 + 98 = ... | 17 + 8 = ... | 17 + 98 = ... |

En este problema, luego del trabajo por grupos, se podrá arribar a distintas conclusiones, según los procedimientos que hayan usado los niños.

Por ejemplo, para 5 + 9:

"*Si contás, es más fácil 9 + 5 que 5 + 9*" porque "*después de 9 hacés 10, 11, 12, 13, y 14*".

O si ya se memorizaron las sumas a 10, "*si te acordás que 9 + 1 es 10; podés agregar uno y después sacar 1*", es decir, 5 + 9 = 5 + 10 – 1 = 15 - 1 = 14;

O también, "*sacarle 1 al 5 y ponérselo al 9*" haciendo 5 + 9 = 4 + 1 + 9 = 4 + 10 = 14.

Para los demás de esa fila de cálculos usando "agregar 1 y sacar 1" sería:

5 + 99 = 5 + 100 - 1 = 105 - 1 = 104; 15 + 99 = 15 + 100 - 1.

En este problema los niños pueden encontrar la regularidad: "sumar 9 es lo mismo que sumar 10 y restar 1" y "sumar 99 es lo mismo que sumar 100 y restar 1".

El docente podrá promover avances preguntando ¿qué les parece que se puede hacer para las sumas de la segunda línea, sumar 8?, ¿y para sumar 98?…

En este caso se podrá, nuevamente, partir de los procedimientos que ellos hayan propuesto. Por ejemplo, 7 + 8 = 7 + 7 + 1 = 14 + 1, apelando a la suma de iguales si ya son cálculos memorizados.

El docente deberá tener en cuenta que la reflexión sobre "formas de resolver" se enriquece cuando se tienen varios ejemplos y, para ello, podrá pedir a los niños que usen esas formas en nuevos cálculos que proponga. También que los mismos niños inventen y escriban en una hojita de borrador cálculos que se puedan resolver con esa regla para proponerles a sus compañeros, que luego intercambien sus cálculos con otro niño para que lo resuelva y ver entonces si la regla obtenida funciona "en más casos".

**Problema 2**

Nuevas sumas y restas

a. Observando que 6 + 3 = 9 ¿cuánto será 60 + 30?

Observando que 7 + 3 = 10 ¿cuánto será 70 + 30?

b. Si 8 – 5 = 3 ¿cuánto será 80 - 50?

Si 12 – 3 = 9 ¿cuánto será 120 - 30?

En este problema se procura que los niños extiendan a números redondos de dos cifras, las sumas ya conocidas de números de una cifra. Por ejemplo:

Para a.

"Si 6 + 3 = 9 entonces 60 + 30 = 90 porque en vez de contar de uno en uno contás de 10 en 10".

Así, los niños pueden encontrar la regularidad: "sumar unos o dieces es lo mismo, podés hacer 6 + 3 y poner un cero".

Para b. se trata de explicitar que si 8 - 5 = 3 entonces 80 - 50 = 30.

Al trabajar a través de la resolución de problemas, el docente deberá privilegiar el cálculo mental, favorecerlo, monitorear los repertorios que los niños van conquistando y situando en su memoria de largo plazo. Es importante dialogar y promover –creando un clima distendido– iniciativas de los niños respecto a procedimientos de cálculo mental. También que cada niño vaya registrando en una ficha personal la lista de “cálculos que ya sé” para que vayan teniendo un control de sus conocimientos y, a la vez, tomando conciencia de los que aún le resta dominar.

## Problemas para variar los “términos” en cálculos de sumar o restar

¿A qué se refiere el perfil con variar sus términos?

El perfil se refiere a analizar en una suma o una resta (a ± b = c) cómo cambia el resultado (c) al cambiar uno o los dos términos (a o b). Se trata de examinar la variación de una o dos de las variables (a, b o c) y comprender sus efectos.

### ¿Qué problemas presentar?

Se plantearán familias de problemas en contexto intramatemático para introducir los cálculos que son transversales a todos los perfiles de numeración y operaciones, propiciando el cálculo mental, la familiarización con los números y la identificación de repertorios. El docente, en función de las características de la clase y su contexto, adaptará los problemas siguientes eligiendo los números más adecuados.

En dichos problemas los niños deberán analizar las sumas que deben hacer comparándolas con la que se da en la consigna, identificando cuál es el número que varía y cómo encontrar el número que falta, sea este un resultado, un sumando, los dos sumandos –en los problemas 1, 2 y 3– o un minuendo –en el problema 4– o un sustraendo en el problema 5.

**Problema 1**

Ejemplo de variación de la suma aumentando uno de los sumandos.

3 SABIENDO QUE 25 + 15 = 40 CALCULEN SIN HACER LA CUENTA.

| SUMANDO 1 | SUMANDO 2 | SUMA |
|---|---|---|
| 25 | 15 | 40 |
| 25 | 25 | |
| 25 | 35 | |
| 25 | 45 | |
| 25 | 55 | |

ZORRITO Y LAS CUENTAS

74

**Problema 2 -** Ejemplo de variación de uno de los sumandos al variar la suma.

## MÁS CÁLCULOS

1 Sabiendo que 32 + 9 = 41, calcula sin hacer la cuenta.

| SUMANDO | SUMANDO | SUMA |
|---|---|---|
| 32 | 9 | 41 |
| 32 | | 46 |
| 32 | | 51 |
| 32 | | 56 |
| 32 | | 81 |

**Problema 3 -** Ejemplo de variación del resultado al variar los dos sumandos.

2 Completa el siguiente cuadro.

| 10 + 20 | 30 | 100 + 200 | 300 |
|---|---|---|---|
| 20 + 30 | | | |
| 30 + 40 | | | |
| 40 + 50 | | | |
| 50 + 60 | | | |

**Problema 4 -** Ejemplo de variación del resultado al variar solo el minuendo.

3 Sabiendo un resultado, calcula sin hacer la cuenta.

| | | |
|---|---|---|
| 50 − 20 = 30 | 60 − 20 = .......... | 40 − 20 = .......... |
| 60 − 20 = 40 | 70 − 20 = .......... | 50 − 20 = .......... |
| 40 − 20 = 20 | 45 − 20 = .......... | 35 − 20 = .......... |

a) Calcular sin hacer la cuenta

b) ¿Cómo lo pensaron?

### Problema 5

Ejemplo de variación del resultado al variar solo el sustraendo.

**4** SABIENDO QUE... CALCULA SIN HACER LA CUENTA:

| | | |
|---|---|---|
| 50 – 20 = 30 | CALCULA | 50 – 30 = ........... |
| 50 – 30 = 20 | CALCULA | 50 – 40 = ........... |
| 50 – 10 = 40 | CALCULA | 50 – 15 = ........... |

BLA BLA ¿CÓMO LO PENSARON?

En estos problemas el docente observará la producción de los niños y en consecuencia podrá promover una reflexión respecto a: la búsqueda de regularidades y la descripción y explicación de lo que sucede en los cuadros. Por ejemplo, en el Problema 2, se puede observar una regularidad en el aumento del resultado, va de 5 en 5, entonces el sumando que falta debe variar del mismo modo porque el otro sumando es fijo. En el problema 4 se busca que los niños analicen sin hacer la cuenta qué ocurre cuando variamos el minuendo en la sustracción.

Para promover la explicitación mencionada, por ejemplo en el problema 4, luego de que cada niño concluyó la parte a) se puede pedir que cada grupo discuta cómo lo pensó para promover que los niños le pongan palabras a los procedimientos que usaron, a las relaciones que establecieron y así puedan, con la conducción del docente, sistematizar los conocimientos.

Luego del trabajo con esta actividad se podría llegar a la siguiente conclusión: "*si aumenta o disminuye el minuendo, la diferencia sufre la misma variación*".

Del mismo modo, con el problema 5, la conclusión a la que se podría llegar es: "*si aumenta o disminuye el sustraendo, la diferencia sufre la variación opuesta*".

La explicitación de las regularidades podrá promoverse proponiendo una actividad como la siguiente.

### Problema 6

Respondan en grupo las preguntas siguientes:

Si minuendo y sustraendo aumentan 10, ¿qué ocurre con el resultado?, ¿cómo lo pensaron?

Y si el minuendo y el sustraendo disminuyen en 10, ¿qué ocurre con el resultado? Piensen un ejemplo.

Completen: si minuendo y sustraendo varían en 10 .... .

Estas propiedades en las que se varían uno o los dos términos de una suma o una resta permiten abordar algunas estrategias de cálculo mental como, por ejemplo:

Se desea calcular 32 - 5; entonces es posible sumar 5 al minuendo y al sustraendo obteniendo 37 -10 que es una resta más fácil.

## Problemas para realizar cálculos aproximados

### ¿Qué problemas presentar?

Algunos problemas no requieren una respuesta exacta, sino que para resolverlos es suficiente realizar un cálculo aproximado. En la vida cotidiana encontramos distintas situaciones en las cuales realizamos este tipo de cálculo.

Por ejemplo, si voy al supermercado a comprar duraznos en almíbar, una Coca-Cola y un paquete de galletitas, que estimo costarán $46, $92 y $45 aproximadamente. Reviso mis bolsillos y veo que tengo $200. Me alcanza, aunque no hice el cálculo exacto. ¿Cómo estimé? Por redondeo y/o truncamiento: 50 + 90 + 50 = 190; 45 + 45 + 90 = 180. Estimar resultados también es necesario para que los niños dispongan de herramientas de control sobre otros cálculos que realizan. Se trata de anticipar cuánto va a dar un cálculo que van a resolver con otra estrategia o verificar aproximadamente si está bien un cálculo realizado. Con este propósito pueden presentarse cálculos en forma descontextualizada (Broitman, Claudia; Grimaldi, Verónica; Sancha, Inés, La enseñanza del cálculo en primer año, 2008).

Por ejemplo, los siguientes:

**Problema 1**

2 SIN HACER LA CUENTA, MARCA LA COLUMNA QUE CORRESPONDA, SI TE PARECE QUE EL RESULTADO DE ESTAS COMPRAS VA A SER MAYOR O MENOR QUE 100.

| COMPRAS | MENOR QUE 100 | MAYOR QUE 100 |
|---|---|---|
| 56 + 50 | | |
| 48 + 39 | | |
| 73 + 46 | | |
| 24 + 77 | | |

77

La intención es redondear hacia arriba o hacia abajo para trabajar con decenas y centenas en la estimación ponderando lo que sobra y lo que falta. Por ejemplo, 48 + 39 es menor que 50 más 40 que es igual a 90 que es menor que 100.

**Problema 2**

Completen las columnas estimando mentalmente los resultados.

| CÁLCULO | El resultado estará entre 100 y 300 | El resultado estará entre 300 y 400 | ESCRIBIR EL RESULTADO APROXIMADO |
|---|---|---|---|
| 199 + 192 | | | |
| 19 + 115 + 60 | | | |
| 45 x 5 | | | |
| 104 x 3 | | | |
| 335 -188 | | | |
| 348 + 145 - 50 | | | |
| 2 x 38 x 10 | | | |
| 480 : 3 | | | |

En el cuadro se muestra en la primera columna de cada fila un cálculo y se propone estimar su resultado. Las columnas 2 y 3 presentan un intervalo en el que se estima se encontraría el resultado. Es importante que los niños confronten y justifiquen sus respuestas.

La realización de las estimaciones habilitará al cálculo mental y también al despliegue de algoritmos personales o convencionales. El docente podrá proponer finalmente efectuar el cálculo exacto o la comprobación con la calculadora.

Al abordar problemas en distintos contextos y con distinta clase de números, es importante que los niños vayan descubriendo en qué situaciones el cálculo aproximado le aporta la información necesaria, en cuáles el resultado exacto es imprescindible y cuándo es apropiado el cálculo mental (apoyándose si es necesario para realizar cálculos parciales en el uso de lápiz y papel) y cuándo recurrir a la calculadora.

## Problemas para usar la calculadora

La calculadora puede ser soporte para aprendizajes matemáticos muy diversos en la medida en que su uso se acompañe de la reflexión de los alumnos. Es una herramienta de cálculo rápido y confiable que puede ser usada como un recurso formativo.

Por ejemplo, la escuela debe enseñar cuándo y cómo usarla y cuando es más pertinente recurrir a otros cálculos. Veamos un caso:

**Problema 1**

Elijan los cálculos que van hacer mentalmente y los que harán con calculadora. Escriban los resultados en la columna que corresponda.

| CÁLCULO | MENTALMENTE | CON CALCULADORA |
|---|---|---|
| 100 + 75 | | |
| 128 + 376 | | |
| 150 + 52 | | |
| 500 - 250 | | |
| 500 - 397 | | |
| 230 - 50 | | |

Para discutir en grupo:

- ¿Qué cálculos eligieron para hacer mentalmente?
- ¿Qué cálculos eligieron para hacer con la calculadora?
- ¿Qué tuvieron en cuenta para elegir?

Permite abordar también un tipo de práctica anticipatoria. En los problemas que se les proponen a los alumnos en los cuales deben anticipar el resultado, la calculadora puede ser un instrumento de verificación de los mismos. Pero también el cálculo mental permite controlar a la calculadora. Por ejemplo, supongamos que multiplico con la calculadora 31 x 85 y me da como resultado 26350. Si se realiza un cálculo mental rápido 30 x 100 = 3000 se puede alertar respecto a un error al teclear.

## Problemas para avanzar hacia los algoritmos para sumar y restar

Los distintos problemas en el campo aditivo que comienzan a abordarse en el Nivel Inicial y que en este trabajo se desarrollan a través del Primer Ciclo son parte de un largo proceso de conquista de cálculos que se espera culminen en el dominio de los llamados algoritmos convencionales, que son las rutinas más eficaces y generales.
Sin embargo, en una práctica matemática con sentido es preciso centrar el análisis en que no siempre el mejor algoritmo es el convencional. Depende de los números involucrados cuál es el procedimiento más eficaz.
Los procedimientos con otras representaciones y los alternativos con números forman parte de un rico camino que debe llevar a comprender el Sistema Numérico Decimal y algún algoritmo eficaz, cuestión que pasamos a detallar.
En ese proceso progresivamente el docente podrá ir planteando situaciones más complejas que requieran la búsqueda de estrategias más económicas y dar lugar a que los niños usen otros procedimientos personales.
Para la suma, por ejemplo:

27 + 14 =

27 = 20 + 7

14 = 10 + 4

$\overline{30 + 11}$

30 + 10 + 1

40 + 1 = 41

Para la resta:

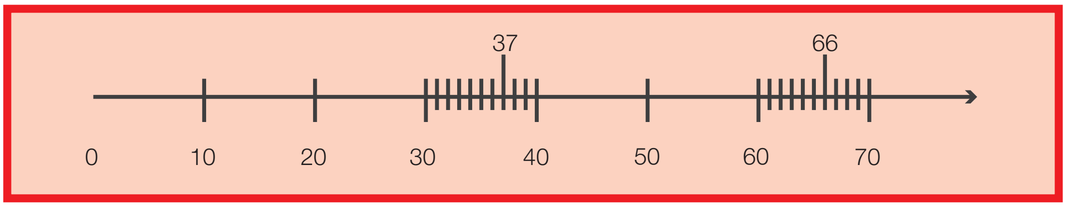
56 - 32 = ¿?

56 → 50 + 6

-<u>32 → 30 + 2</u>

20 + 4

Otro recurso para abordar la suma y la resta antes de presentar el algoritmo convencional es el trabajo con la recta numérica. En el caso de la resta con dificultad, podría presentarse de la siguiente manera:




Si se desea restar a 66 el número 37 es posible representar en la recta numérica el número 37 y el 66 y observar que desde 37 para llegar a 40 hay 3, luego contar de 10 en 10 hasta llegar a 60, hay 20 y luego agregar 6 unidades más.

Comprobamos que 3 + 20 + 6 = 29.

Es una oportunidad de observar que sumando al minuendo y al sustraendo el número 3 el cálculo se transforma en 69 - 40.

A partir de un trabajo sistematizado sobre procedimientos personales (propios y de los compañeros) es posible plantear estos algoritmos intermedios basados en descomposiciones. Luego podrían presentarse en una clase dos procedimientos para el mismo cálculo, uno como el que está más arriba y el algoritmo convencional y plantear al grupo la pregunta: *¿qué tienen de igual y qué tienen de diferente estas dos formas de resolver?*

## c. Las propiedades de la suma y la resta

### ¿Qué "uso" de las propiedades hacen los niños cuando trabajan en matemática?

El maestro en su planificación intencional de la práctica del cálculo en el Primer Ciclo, así como en los procedimientos que los alumnos van construyendo por sí mismos, observará cómo en el grupo se van construyendo y utilizando conceptos y teoremas en acto. Esto significa que los alumnos irán utilizando en los hechos propiedades de la adición y la multiplicación sin su denominación, que se irá incorporando más adelante.

Lo importante es que, cuando el maestro advierta ese uso, plantee al grupo alguna pregunta de reflexión y nuevas actividades para explorar otros ejemplos que permitan explicitar y escribir en términos coloquiales la propiedad encontrada.

Es el cálculo mental tal vez el recurso más idóneo para avanzar en el uso de estas propiedades que son fundamento de todos los algoritmos. Por ejemplo, si se desea calcular 17 + 8 mentalmente, una forma de organizarlo es como 17 + 3 + 5 (descomponiendo en virtud de la propiedad asociativa; disociando: 8 como 3 + 5 y luego asociando 17 + 3 = 20 y finalmente 20 + 5 = 25). Otra forma podría ser escribir 15 + 2 + 8 con la idea de calcular 15 + 10. Otorgar a la práctica del cálculo mental un lugar destacado en el aula favorecerá un compromiso de los niños con "el hacer matemática" y ellos desplegarán por sí mismos las propiedades, sin fundamentarlas ni identificarlas nominalmente integrándolas a sus repertorios de cálculo.

### ¿Qué problemas presentar?

Se presenta una familia de problemas poniendo la mirada en las propiedades de las operaciones en acción. La intención no es ni formular las propiedades ni mencionarlas como tales y por su nombre, sino diseñar actividades que en el proceso de resolución las involucren. A partir de la producción de los niños se busca validar "experimentalmente" con ellos, procedimientos distintos pero correctos en los cuales intervengan esas propiedades.

## Problemas para usar las propiedades de las operaciones

**Problema 1**

Pedro camina por la orilla del río en busca de caracoles que va poniendo en una cajita. El lunes encontró 3, el martes 4 y el miércoles 6. ¿Cuántos caracoles juntó en estos tres días?

Los niños podrían resolver con procedimientos como los siguientes:

Federico 3 + 4 = 7 y luego 7 + 6 = 13

Ana 4 + 6 = 10 y luego 10 + 3 = 13

Ambos resultados son correctos y su validez se sustenta en la propiedad asociativa:

3 + 4 + 6= (3 + 4) + 6 = 3 + (4 + 6)

Se podría concluir con los niños que "*cuando tienen una adición del tipo 3 + 4 + 6 es correcto calcular primero 3 + 4 (asociar) y luego sumarle 6; también es correcto calcular primero 4 + 6 (asociar) y al resultado sumarle 3*".

Señalemos que los procedimientos presentados son propios de los niños en Nivel Inicial o de primer año, pues los niños suelen apelar a los repertorios que han ido conquistando, utilizando el cálculo mental. Por ejemplo, se podría sumar 3 + 4 y luego descomponer 7 en 1 + 6, para sumar los iguales 6 + 6 = 12 y luego agregarle 1, 12 + 1 = 13.

Otros niños, ante la necesidad de calcular 3 + 4 + 6 proceden mentalmente, calculando primero 4 + 6 = 10 y luego 10 + 3 = 13. En este procedimiento en un cálculo aditivo, primero aplican la propiedad conmutativa (al cambiar el orden y pensar el cálculo como 4 + 6 + 3) y luego la asociativa al dar el paso a 10 + 7. Si este problema se propone para resolver en equipos puede ser útil reflexionar lo hecho contrastando con la calculadora.

Una cuestión central que queremos señalar para el maestro es que sin la propiedad asociativa no sabríamos sumar tres números como 3 + 4 + 6 pues no tenemos un repertorio de todas las sumas ternarias de los dígitos del 0 al 9. Esto es porque en la tabla de sumas (de 0 a 9) se encuentran todas las sumas de 2 dígitos, es decir, la tabla de sumas es binaria, refiere a sumas de un par de dígitos; no disponemos de una tabla que nos otorgue el resultado de sumar 3 + 4 + 7. Para obtener el resultado debemos asociar para apoyarnos en una suma con dos sumandos.

El trabajo con las propiedades ocupará entonces un rol transversal en la resolución de problemas y en las distintas actividades de cálculo. Más adelante, cuando corresponda una reflexión más formal de la Matemática y sus herramientas, tendrán lugar reflexiones más específicas.

# 3.3 Familias de problemas para multiplicar y dividir

## a. Significados de la multiplicación y la división en problemas de contexto extramatemático

Es conveniente presentar desde el Primer Ciclo problemas multiplicativos que involucren los distintos significados de las operaciones.

### ¿Qué tipos de problemas multiplicativos presentar?

El campo multiplicativo refiere a situaciones que requieren una multiplicación y/o una división, y el esquema "Problemas multiplicativos" nos permite una visión comprensiva de los problemas multiplicativos organizados en tres grupos según que en ellos intervengan uno, dos, o tres tipos de cantidades. Asimismo, facilita la realización de dos consideraciones relevantes: que las situaciones que requieren de multiplicación y división se encuentran en alta proporción en problemas de proporcionalidad; y la importancia que debe darse a la diversidad de las operaciones de pensamiento que se ponen en juego al abordar cada una las situaciones representativas que analizaremos a continuación. También en este campo, los problemas conducen a distintos tipos de razonamiento con distinto grado de dificultad.

Corresponde aclarar que la clasificación de los problemas presentados en los esquemas no tiene objeto mencionarla a los niños; su propósito es tenerlos en cuenta para la elaboración de problemas y manejo didáctico por el docente en su planificación.

En este sentido es relevante el análisis matemático de las relaciones, de las informaciones y de las preguntas involucradas en cada problema a abordar, en este proceso el alumno se irá apropiando de modos de pensar, del lenguaje y de los símbolos adecuados.

Asimismo, es central considerar los diferentes significados pues según cuáles sean las relaciones involucradas cambia la complejidad para su resolución y entonces es necesario planificar teniendo en cuenta las dificultades relativas entre ellos. Por ejemplo, muchos niños que reconocen la multiplicación para los problemas de proporcionalidad tienen mayor dificultad para reconocerla en los de combinatoria.

En el esquema "Problemas Multiplicativos" se presentan problemas de *producto escalar*, de *proporcionalidad* y de *producto de medidas*.

¿Cómo los analizamos?

## Problemas de producto escalar

En los problemas de producto escalar, se establece una relación numérica en la que entra en juego un solo espacio de medida y un operador. El operador (factor a-dimensionado) se asocia a expresiones del tipo "muchas veces", "tantas veces menos", "tantas veces más" que relaciona a magnitudes de la misma naturaleza. Por ejemplo, en el problema:

"La altura del Obelisco es tres veces menor que la de la Torre Ejecutiva que mide 120 metros. ¿Cuál es la altura del Obelisco?", el operador es "tres veces menos" y 120 corresponde a una medida de longitud.

## PROBLEMAS MULTIPLICATIVOS

**MULTIPLICACIÓN** — **ESPACIOS DE MEDIDA** — **DIVISIÓN**

**1- PRODUCTO ESCALAR**

se establece una relación numérica en la que entra en juego un solo espacio de medida y un operador.

- **Multiplicación**
  - el doble
  - tantas veces más
- **División**
  - la mitad
  - tantas veces menos

**2- PROPORCIONALIDAD**

en los problemas de proporcionalidad se relacionan dos magnitudes.

- **Multiplicación**
  - proporcionalidad
- **División**
  - reparto
  - agrupamiento

**3- PRODUCTO DE MEDIDAS o CARTESIANO,**

se establece una relación ternaria entre tres cantidades: dos espacios de medida diferentes cuyo producto genera un tercer espacio. (Combinatoria, Organizaciones rectangulares.

- **Multiplicación**
  - Encontrar la medida producto cuando se conocen las medidas.
- **División**
  - Encontrar una de las medidas elementales cuando se conoce la otra, y la medida producto.

## Problemas de proporcionalidad

En los problemas de proporcionalidad intervienen dos espacios de medida. Por ejemplo en:

"María compra paquetes con 8 servilletas cada uno. Si compró 5 paquetes, ¿cuántas servilletas tendrá?", 8 corresponde a la cantidad de servilletas por paquete y 5 a la cantidad de paquetes.

En este caso, organizar los datos en una tabla como la siguiente puede facilitar la comprensión:

| Paquetes | Servilletas |
|---|---|
| 1 | 8 |
| 5 | X |

Se puede observar que se trata de una relación de proporcionalidad directa en la que intervienen 4 números y la solución se obtiene mediante una multiplicación donde

(8 servilletas/por paquete) x 5 paquetes = 40 servilletas

En el problema: "Andrea tiene en su casa 5 paquetes con la misma cantidad de servilletas y en total tiene 40 servilletas. ¿Cuántas servilletas tiene cada paquete?" se trata de un “reparto”, la interrogante es la medida de un objeto, el valor unitario: “cuántas servilletas tiene un paquete” y la tabla será:

| Paquetes | Servilletas |
|---|---|
| 5 | 40 |
| 1 | X |

La respuesta se obtiene mediante una división de medidas de dos espacios diferentes: el dividendo representa la cantidad de servilletas y el divisor la cantidad de paquetes:

40 servilletas: 5 paquetes = 8 servilletas en cada paquete.

En el problema: "Mariana compra paquetes de 8 servilletas cada uno. Tiene 40 servilletas, ¿cuántos paquetes compró?".

Se trata de un "agrupamiento" (o partición), en la división intervienen medidas del mismo tipo (servilletas) y el número 5 es el coeficiente de proporcionalidad.

40 servilletas: 8 servilletas por paquete = 5 paquetes

| Paquetes | Servilletas |
|---|---|
| 1 | 8 |
| X | 40 |

## Problemas de producto de medidas

En los problemas de producto de medidas, se establece una relación ternaria entre tres cantidades: dos espacios de medida diferente, cuyo producto genera un tercer espacio (combinatoria, organizaciones rectangulares).

Tal es el caso de los problemas de baldosas, de filas y columnas. Por ejemplo, el problema: "Rodrigo quiere poner baldosas en la pared frente a la pileta. Si quiere que se vean como un cuadrado de 4 baldosas por lado, ¿cuántas baldosas deberá colocar?".

Intervienen 4 baldosas de largo y 4 baldosas de ancho y 16 baldosas de superficie.

Los problemas de embaldosados ofrecen una amplia variedad de elección de variables didácticas, incluyendo la figura de referencia (cuadrado, rectángulo, figura con forma de L) lo que ayudará al propósito del docente de promover que los niños accedan a situaciones más complejas y se familiaricen con los cálculos que realizan.

Otra alternativa son los problemas de combinatoria como: "Para vestir a mi osito de peluche tengo tres remeras y dos pantalones. ¿De cuántas maneras distintas lo puedo vestir?".

En este caso, 3 son cantidad de remeras, 2 la cantidad de pantalones y 6 la cantidad de conjuntos posibles.

https://illuminations.nctm.org/Activity.aspx?id=3540

## Problemas de proporcionalidad para multiplicar

Comencemos considerando problemas que se resuelven con la multiplicación.

Los problemas de multiplicación se inician desde NI y primer año, con distintos procedimientos y discutiendo sobre ellos tal como se puede observar en los problemas presentados. Las expresiones de cálculos con la introducción del signo de "x" se introducen en segundo año y se avanza en el resto del Primer Ciclo. En tercer año, con el trabajo sobre propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma, estarían en condiciones de trabajar sobre el algoritmo convencional.

Veamos algunos ejemplos:

## Problema 1

### CONTANDO Y CALCULANDO EN LA ESCUELA

1 Mulita ayuda a la maestra, pone 2 cascolas en cada una de las 4 mesas que hay en la clase.

¿Cuántas cascolas pone en total?

---

Este problema se puede proponer en NI y primer año. Para resolverlo, sin un conocimiento previo de la multiplicación, los alumnos suelen apelar a sus conocimientos sobre el conteo. Por ejemplo, podrán dibujar las 4 mesas con las cascolas y luego contarlas.

Si ya conocen la suma podrían escribir: 2 + 2 + 2 +2 = 8.

Un error que puede aparecer y que tendrá que ser objeto de análisis en la clase es la resolución del tipo 2 + 4.

## Problema 2

2 En el taller de cocina, mulita y sus compañeros van a preparar panes. La maestra pone 4 huevos en cada pote y le entregó un pote a cada uno de los 5 equipos que hay en la clase.

¿Cuántos huevos pone en total?

---

Este problema se puede proponer en primer año y segundo año. Los alumnos  pueden resolver por representación iconográfica o conteo en inicial y comienzos de primer año; también planteando la suma 4 + 4 + 4 + 4 + 4 y en segundo y tercer año multiplicando 5 x 4 ¿Cómo pasan los alumnos de la suma a la multiplicación? Analizando 4 + 4 + 4 + 4 + 4 es lo mismo escribir 4 repetido 5 veces; se puede representar como “4 x 5”.

## Problema 3

3 La profesora de educación física organiza un juego con todas las pelotas que tiene en el armario. Arma 6 equipos y a cada equipo le da una canasta con 8 pelotas.

¿Cuántas pelotas hay en la escuela?

---

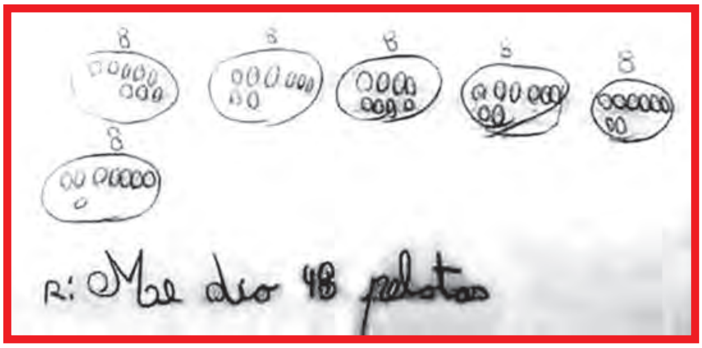
BLA BLA

¿Cómo pueden saber sin contar uno por uno, cuántos lápices hay en 4 cajas, si cada caja trae 6?

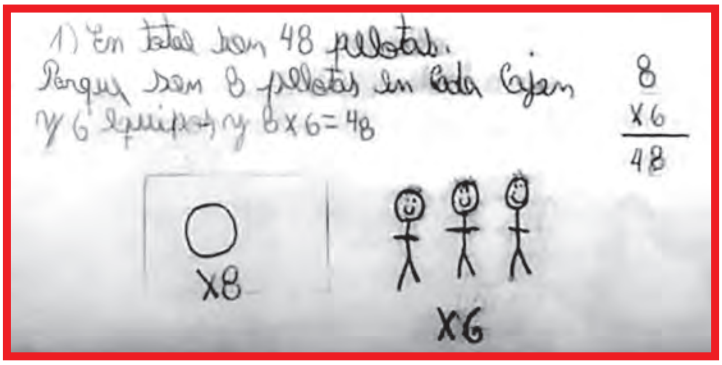

MULITA Y LOS NÚMEROS

54

También en segundo año se puede presentar este problema. Veamos qué procedimientos producen los niños y niñas.




Procedimiento 1




Procedimiento 2

En la primera resolución el niño hace una representación icónica de las 8 pelotas y además las cardinaliza. Luego pone el resultado que puede desprenderse de sumar 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8, seis veces o del conteo de las pelotas que representó.

En la segunda resolución el niño hace corresponder al dibujo de la pelota un 8 y al de los niños un 6 y escribe una multiplicación.

El docente en la puesta en común podrá pedir a los niños que comparen las distintas resoluciones y preguntar *¿dónde aparecen los números 8 y 6 en la primera resolución?* Arribando a la conclusión de que el 8 se repite 6 veces, que el procedimiento más económico es 8 x 6.

### Problema 4

En mi cumple éramos 28 niños, compré caramelos para regalar a mis amigos y le di 5 a cada uno. ¿Cuántos caramelos compré?

En segundo o tercer año, el maestro puede proponer problemas donde haya que multiplicar un número de dos cifras por otro de una cifra. Se espera que el avance de los niños en las descomposiciones aditivas les permita comprender que el valor posicional del 2 en 28 es 20 y producir un procedimiento como el 1.

| | |
|---|---|
| 28 x 5<br>5 veces (20 + 8)<br>20 x 5 =100<br>8 x 5 = 40<br>100 + 40 = 140 | $\begin{array}{r} 28 \\ \times\ 5 \\ \hline 40 \\ 100 \\ \hline 140 \end{array}$ |
| **Procedimiento 1** | **Procedimiento 2** |

Luego, se pueden presentar ambos procedimientos juntos para pedir que comparen semejanzas y diferencias, arribando así al procedimiento convencional.

**Problema 5**

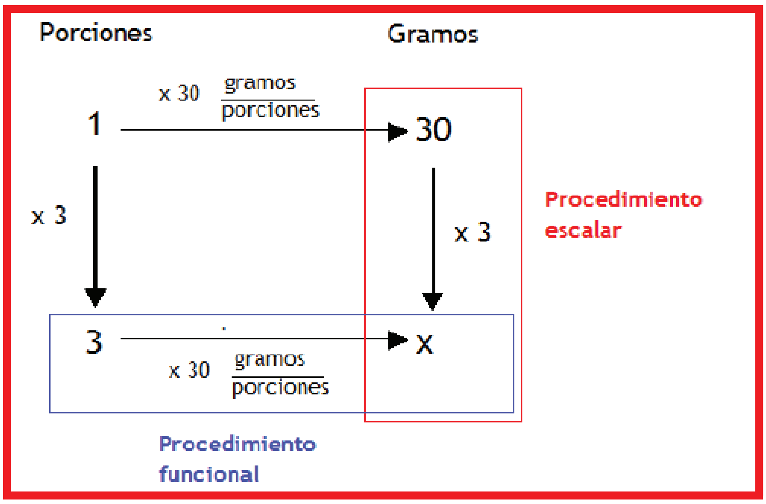

*Actividad extraída de la Evaluación en línea*

Este problema, pensado para tercer año requiere para su resolución "por un lado, identificar que se está frente a una relación de proporcionalidad directa y por otro, combinar los datos que están dados en la imagen de la etiqueta del paquete de galletitas y de los que se presentan en la pregunta. Por tratarse de una actividad propuesta para tercer año escolar probablemente los niños no planteen la proporción".

En efecto, establecer la relación entre los datos requerirá de un trabajo de interpretación del enunciado que el maestro debe considerar como primera parte de la clase, preguntando *¿qué dice el cartel del paquete de galletitas? ¿Qué significa?*

Es probable que los niños resuelvan relacionando las porciones con los gramos y calculen los gramos de galletitas del paquete haciendo uso de la multiplicación.

Como docentes, pensemos en que la situación planteada corresponde a un problema de proporcionalidad –isomorfismo entre dos magnitudes cantidad de porciones y masa– y que, tal como lo señala Chamorro (2003), la situación podría representarse como en el esquema. Esta es una reflexión que no ha de ser objeto de enseñanza.



¿Cómo se podría gestionar la clase?

- Presentación del problema. El docente se asegurará que todos los niños hayan comprendido el desafío propuesto.
- Resolución del problema (en forma individual, en pequeños grupos, en duplas). En este momento se promueve la utilización de variados procedimientos de acuerdo a los conocimientos que posee cada alumno, dando pistas sin intervenir directamente.
- Puesta en común: Es el momento de confrontación de los resultados, de los procedimientos y de argumentos (sobre la validez de esos resultados y procedimientos) en los que el maestro organizará la reflexión. Es conveniente seleccionar algunas resoluciones para el análisis. Como se puede observar en el problema 3 algunos niños utilizan representaciones, mientras que otros ya utilizan el algoritmo y argumentan. Se trata de encontrar los puntos en común e ir aproximando a los niños a los procedimientos más económicos, proponiendo variables a una misma situación para que esos procedimientos evolucionen, por ejemplo promoviendo la superación de la resolución gráfica o icónica.
- Sistematización de los conocimientos a los que llegó el grupo. El docente establecerá las relaciones entre el conocimiento que circuló y el que se pretende enseñar, explicita las propiedades, vincula los conocimientos producidos y los relacionará con otros.

## Problemas de reparto y agrupamiento para dividir

En los problemas de "reparto", conociendo el total de elementos a repartir entre un determinado número de grupos, se busca el número de elementos en cada grupo y, en los de "agrupamiento" conociendo el total de elementos a agrupar y el número de elementos que tendrá cada grupo se busca el número de grupos resultantes.

Tanto para unos como para otros se espera que los niños de NI y primer año puedan resolverlos usando dibujos, conteo, sumas, restas o multiplicaciones. A partir de segundo año y dependiendo de los números involucrados, se comenzarán a utilizar algoritmos.

Una aclaración importante para los problemas de reparto es que, repartir no es sinónimo de dividir, se necesitan condiciones para que el modelo sea la división. Es necesario que los repartos sean equitativos y es importante que esto sea motivo de debate en la clase. Por lo tanto, los repartos por sí mismos no son suficientes para abordar la división exacta en los naturales. Asimismo, lo que sobra no siempre se reparte y en la formulación de los problemas es importante considerar también esta alternativa.

Veamos ejemplos de problemas con estas diferencias y cómo resuelven los niños y niñas:

**Problema 1**

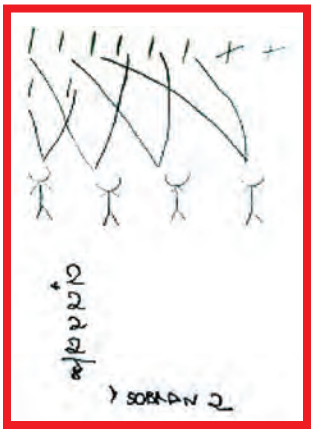
Mamá tiene 10 barritas de cereales para repartir entre sus cuatro hijos ¿Cómo puede hacerlo?

Este problema puede resolverse desde NI hasta segundo año. Es de reparto, pero no hace referencia a una intención de reparto equitativo, por lo tanto, los niños en el aula podrán expresar sus decisiones. Por ejemplo, 2 no los reparte y se los come mamá, o les asignan 3 barritas a dos de los niños y 2 barritas a los otros dos. Es un caso interesante para promover reflexiones acerca de que hay repartos equitativos y no equitativos, analizando las alternativas que planteen los niños y preguntando luego: ¿Qué debería decir el problema para saber que hay que repartirlo equitativamente?

## Problema 2

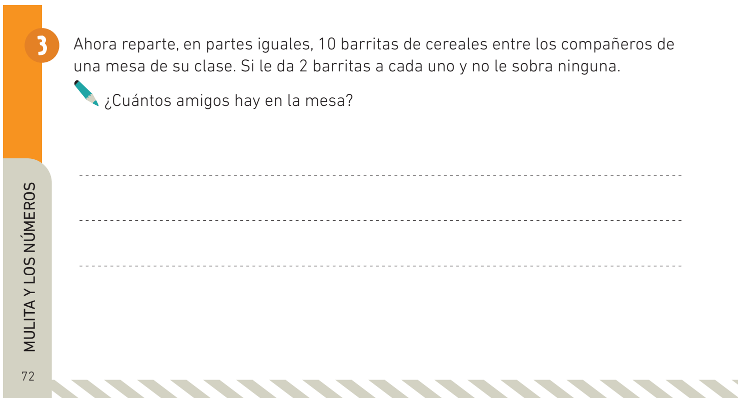
Mamá tiene 10 barritas de cereales y quiere repartirlas en partes iguales entre sus cuatro hijos. ¿Sobran barritas?

La aclaración en el enunciado "en partes iguales" hace de este problema uno de "reparto equitativo" y hay dos barritas que sobran.




En este procedimiento se va asignando a cada niño dos barritas y se marcan las dos que sobran. La representación numérica permite advertir que quien resuelve sólo conoce la suma y la resta como forma de expresar las relaciones que ha establecido.

## Problema 3



3 Ahora reparte, en partes iguales, 10 barritas de cereales entre los compañeros de una mesa de su clase. Si le da 2 barritas a cada uno y no le sobra ninguna.

¿Cuántos amigos hay en la mesa?

MULITA Y LOS NÚMEROS

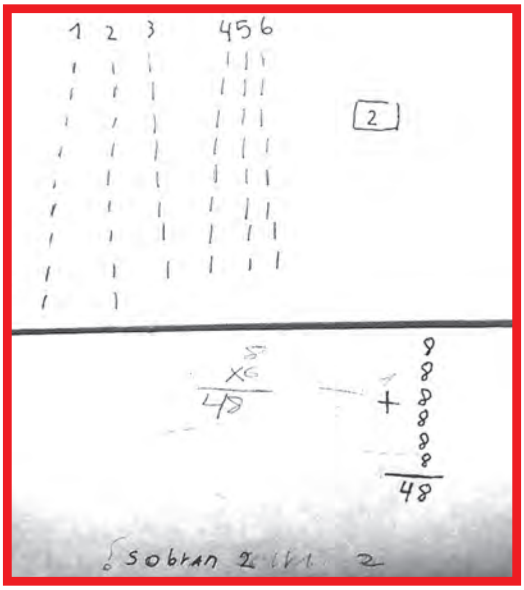
72

Este tipo de problemas de agrupamiento ofrece mayores dificultades a los niños. La incógnita es la búsqueda de partes u objetos, en este caso, ¿a cuántos niños se está repartiendo?

En primer año, los niños procedieron como se desprende del dibujo. Primero dibujaron la colección de 10 barritas y luego fueron asignando una barrita a cada niño.

### Problema 4

Se reparten equitativamente 50 camisetas entre 6 equipos. ¿Cuántas camisetas sobraron?




Este problema, presentado en segundo año da lugar a procedimientos donde los palitos representan las camisetas y se puede suponer que se hizo el reparto de las camisetas una a una para los seis equipos, procedimiento sencillo que se apoya en el conteo y no requiere de anticipación, se observa inclusive que en las dos primeras columnas de palitos se dibuja uno más, los dos que sobran. Luego de contar los ocho palitos de cada columna, la suma permite controlar lo realizado.

### Problema 5

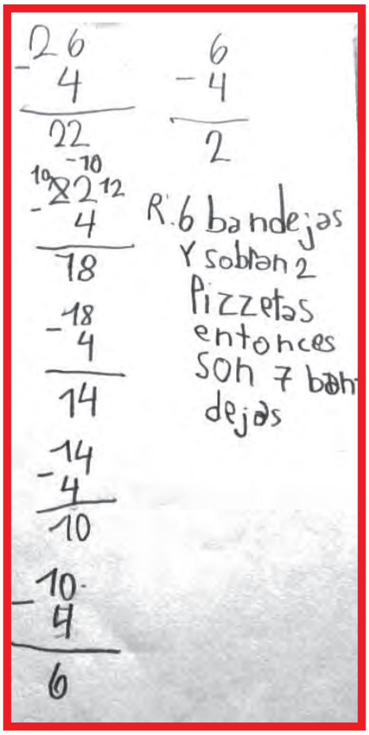
Mamá hornea pizzetas en bandejas de a 4. Amasó 26 pizzetas. ¿Cuántas bandejas necesitó para hornearlas todas?

Este problema se puede presentar en segundo o tercer año pero dará lugar a diferentes procedimientos de resolución. En él hay que considerar el resto en el análisis para responder. Es posible verlo como un reparto de pizzetas en bandejas y llegar a la conclusión errónea de que con 6 bandejas puedo hornear 26 pizzetas. Pero es necesario advertir que quedan aún 2 pizzetas sin hornear, entonces se requiere una bandeja más para hornearlas todas.

En segundo se podrá resolver con sumas sucesivas hasta llegar a un número menor o igual que 26.

4 + 4 = 8 8 + 4 = 12 12 + 4 = 16 16 + 4 = 20 20 + 4 = 24

O con restas sucesivas como en el ejemplo. Este procedimiento permite inferir que, cada vez que se restan 4, se está pensando en completar una bandeja y así, como hubo 6 restas, se llenaron 6 bandejas. La respuesta da cuenta de que se ha discutido en la clase la consideración del resto.




Como se puede observar en los ejemplos de resoluciones presentadas, los niños que aún no poseen un procedimiento experto para dividir utilizan algoritmos artesanales que es conveniente comparar buscando puntos en común y analizando cuáles son más económicos. Es importante analizar los errores para que todos los alumnos visualicen por qué un cálculo o una estrategia no son válidos para resolver el problema.

“La intervención del docente no intentará borrar las diferencias, sino que las reconocerá e intentará que cada alumno progrese desde sus conceptualizaciones a otras más avanzadas” (Chemello, 1995). Los alumnos llegarán a conclusiones provisorias y continuarán realizando sucesivas aproximaciones a lo largo de todo el ciclo escolar.

Si bien se ha presentado en este trabajo una familia de problemas de proporcionalidad se espera que el maestro trabaje en el Primer Ciclo con los tres significados – producto escalar, producto de medidas y proporcionalidad. Por ejemplo:

## Problemas de producto escalar

En el supermercado las galletitas cuestan $20, en la panadería de enfrente cuestan el doble y en el Salón de Pocho cuestan la mitad. ¿Cuánto cuestan las galletitas en la panadería y en el Salón de Pocho?

En este problema se advierte que hay un solo espacio de medidas, es el de las cantidades de dinero. Aquí el x2 y :2 de doble y mitad no son cantidades sino "escalares" sin unidad.

## Problemas de producto de medidas

Para vestir a mi osito de peluche tengo tres remeras y dos pantalones. ¿De cuántas maneras distintas lo puedo vestir?[3]

En este ciclo, los problemas de producto de medidas refieren a la formación de pares de dos tipos de cantidades, haciendo todas las combinaciones posibles. Se suelen representar con diagramas de árbol o en tablas de doble entrada.

En este caso se trata de tres remeras distintas (por ejemplo roja, amarilla y azul) y dos pantalones (por ejemplo corto y largo) y los pares se forman con cada pantalón combinado con cada una de las remeras.

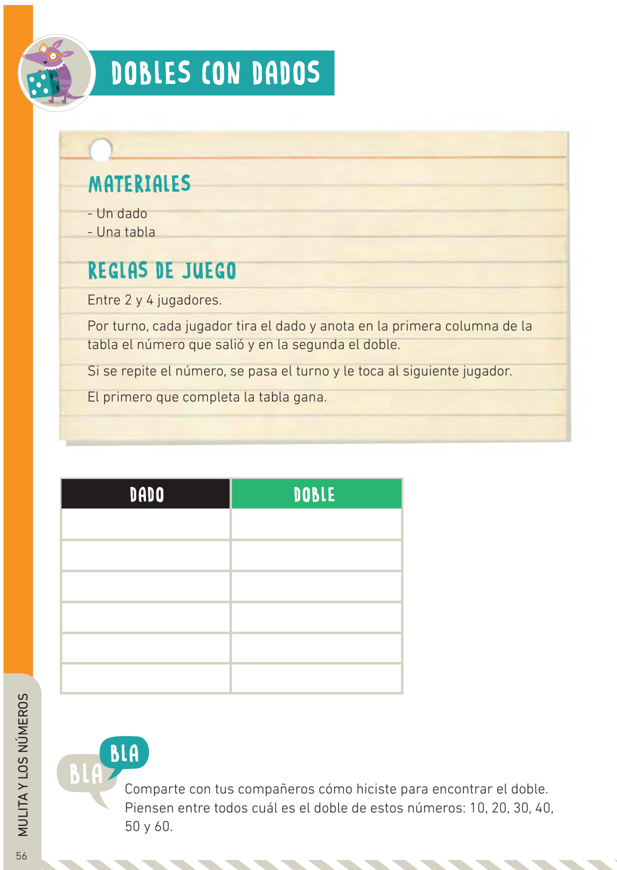
## b. Distintos tipos de cálculos para multiplicar y dividir

También para esta operación presentaremos problemas para trabajar en el aula con distintos tipos de cálculos que podrán ser organizados por el maestro en conjuntos de problemas más amplios en función de su planificación.

## Problemas para construir un repertorio de multiplicaciones

Presentamos aquí juegos para diferentes repertorios recordando que, luego de cada juego, es necesario retomar los cálculos registrados por los niños para reflexionar sobre ellos y sistematizarlos. Asimismo a continuación se deberá organizar el aprovechamiento didáctico del juego proponiendo actividades de juego simulado y otras actividades de uso de esos mismos cálculos en contexto intramatemático.

**Problema 1**



DOBLES CON DADOS

MATERIALES

- Un dado
- Una tabla

REGLAS DE JUEGO

Entre 2 y 4 jugadores.

Por turno, cada jugador tira el dado y anota en la primera columna de la tabla el número que salió y en la segunda el doble.

Si se repite el número, se pasa el turno y le toca al siguiente jugador.

El primero que completa la tabla gana.

| DADO | DOBLE |
|---|---|
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |

BLA BLA

Comparte con tus compañeros cómo hiciste para encontrar el doble. Piensen entre todos cuál es el doble de estos números: 10, 20, 30, 40, 50 y 60.

MULITA Y LOS NÚMEROS

56

[3] http://illuminations.nctm.org/tools/bobbie_bear/nctm_bobbie_bear/NCTMBobbieBear.html?locale=es_US

## Problema 2

**2** Ahora, por turno, cada jugador tira dos dados y completa la tabla. Si se repite el número de la suma, se pasa el turno y le toca al siguiente jugador.
El primero que completa la tabla gana.

| DADO 1 | DADO 2 | SUMA | DOBLE DE LA SUMA |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

En la puesta en común el docente irá promoviendo el análisis de regularidades y construyendo la tabla del 2. Guiará el intercambio para observar que del juego surgen los repertorios de la tabla del 2 de los números del 1 al 12.

## Problema 3

### LA MINIGENERALA

**MATERIALES**

- Cinco dados
- La tabla que está en esta página

**REGLAS DE JUEGO**

Equipos de entre 2 y 4 jugadores.

Se tiran los 5 dados en tres tiradas buscando obtener el máximo de número repetidos. En la primera tirada se elige el número que se haya repetido más veces separando esos dados y volviendo a tirar el resto, buscando más dados con igual número al elegido. Lo mismo en la siguiente tirada. Si en la primera tirada los dados son todos diferentes se elige uno o se vuelven a tirar todos. Luego de las tres tiradas, se toman todos los dados repetidos y se anota en la tabla el total obtenido, siendo este el puntaje.

En las siguientes jugadas, de tres tiradas cada una, se elegirán números que correspondan a lugares vacíos de la tabla. Gana el equipo que obtiene mayor puntaje total.

| DADO | PUNTAJE EQUIPO 1 | PUNTAJE EQUIPO 2 |
|---|---|---|
| 1 | | |
| 2 | | |
| 3 | | |
| 4 | | |
| 5 | | |
| 6 | | |
| TOTAL | | |

GUAZUBIRÁ Y LOS NÚMEROS
26

En la puesta en común, se arma una tabla para ordenar todos los resultados y comentarlos construyendo una mini tabla pitagórica. El docente promoverá el intercambio con los alumnos para observar que los resultados obtenidos permiten construir los repertorios de la tabla del 1 al 6 con factores 1, 2, 3, 4, 5, es decir, hasta 5 en las filas (cantidad de dados) y 6 en las columnas (puntos de los dados).

Asimismo realizará preguntas para que los niños puedan explicitar las regularidades que observen. Por ejemplo podrán decir que en la fila del 2, "es como contar de 2 en 2", y en la del 5 "es como contar de 5 en 5". Y preguntar: en la fila del 4 ¿cómo se pasa de 4 a 8? ¿Y de 8 a 12?

## **Problema 4** - La tabla pitagórica

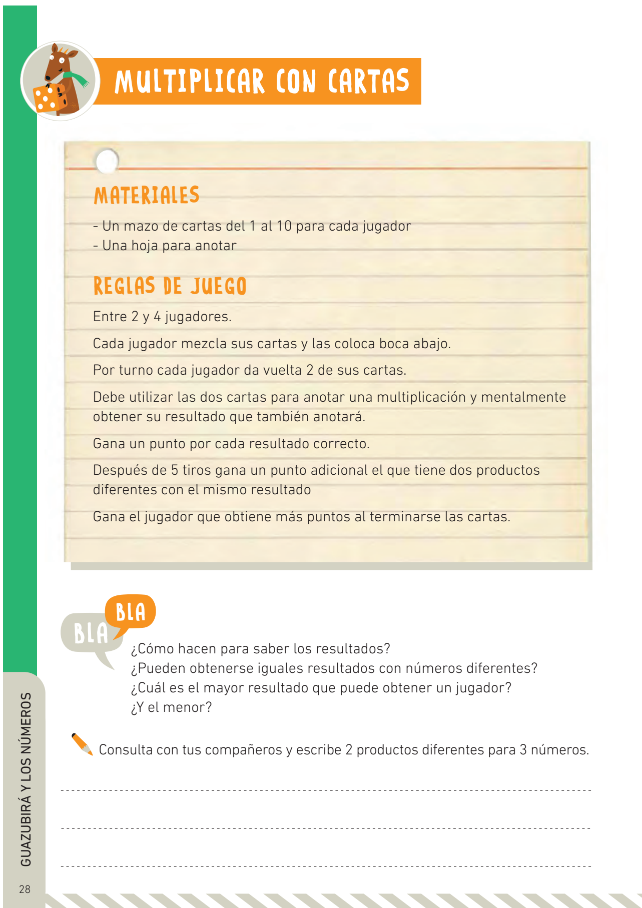
¿Cómo completarían las filas?

Se presenta la tabla de 10 x 10 con la primera columna y la primera fila con los números del 1 al 10. Se trata de extender la mini tabla a la pitagórica completa.

Luego de pedir a los niños que completen las filas del 1 al 5 el maestro podrá preguntar: *¿cómo completarían las filas?*

Utilizando las regularidades de las filas ya conocidas los niños podrán completarlas y también, con la misma idea, avanzar en las tablas restantes.

## **Problema 5**


MULTIPLICAR CON CARTAS

MATERIALES

- Un mazo de cartas del 1 al 10 para cada jugador
- Una hoja para anotar

REGLAS DE JUEGO

Entre 2 y 4 jugadores.

Cada jugador mezcla sus cartas y las coloca boca abajo.

Por turno cada jugador da vuelta 2 de sus cartas.

Debe utilizar las dos cartas para anotar una multiplicación y mentalmente obtener su resultado que también anotará.

Gana un punto por cada resultado correcto.

Después de 5 tiros gana un punto adicional al que tiene dos productos diferentes con el mismo resultado

Gana el jugador que obtiene más puntos al terminarse las cartas.

BLA BLA

¿Cómo hacen para saber los resultados?
¿Pueden obtenerse iguales resultados con números diferentes?
¿Cuál es el mayor resultado que puede obtener un jugador?
¿Y el menor?

Consulta con tus compañeros y escribe 2 productos diferentes para 3 números.

GUAZUBIRÁ Y LOS NÚMEROS 28

Luego, en la puesta en común, se pregunta por los procedimientos utilizados en los cálculos. Con lo que se podrá arribar a conclusiones sobre ir sumando" y sobre "da el mismo resultado al multiplica 3 x 5 que 5 x 3", es decir, ejemplos de propiedad conmutativa.

El siguiente es un ejemplo de problema de juego simulado que lleva a los niños a reflexionar sobre la regla de multiplicación por 10.

**Problema 5.1**

Florencia descubrió la carta con el número 10. Antes de descubrir la segunda carta dijo: el resultado de multiplicar sus dos cartas iba a ser un número terminado en 0. ¿Tiene razón? ¿Por qué?

**Problema 6**

Se cambia la regla a "Cada jugador descubre 3 cartas y realiza mentalmente su multiplicación".

Los cálculos que se registren permitirán luego, en la puesta en común, discutir la composición de factores de diferentes formas, es decir, la propiedad asociativa.

**Problema 6.1**

En una tirada Florencia sacó las cartas con los números 2, 5 y 6. Ignacio sacó las cartas 6, 2 y 5. Antes de realizar las multiplicaciones Ignacio dijo que habían empatado. ¿Es verdad?

**Problema 7**

Se cambia la regla a "Cada jugador descubre dos cartas y las suma; luego descubre una carta más y calcula el producto de la suma realizada por el número de esa carta".

El debate podrá ser sobre otras formas de obtener el mismo resultado con los mismos números y arribar a la propiedad distributiva.

El docente observará las resoluciones y favorecerá la discusión entre los alumnos. Focalizará la atención en los procedimientos de cálculo, en los repertorios multiplicativos adquiridos, en la construcción de las tablas del 1 al 10 y en la aplicación en "acto" de propiedades: en el problema 5 la propiedad conmutativa; en los problemas 6 y 7 respectivamente la propiedad asociativa y la propiedad distributiva. Por ejemplo, luego del problema 6 se podrá proponer:

**Problema 8**

Realizar los siguientes cálculos: a) 10 x 3 x 1 x 2 =; b) 25 x 4 x 0 x 3; c) 0 x 123

Observación: Se trata de cálculos en lo que aparece el 1 como neutro de la multiplicación y el 0 como factor absorbente. Los docentes podrán tratarlos en diferentes situaciones de cálculo y el intercambio de los alumnos entre sí y con el docente conducirá a su apropiación.

Podría ser una buena oportunidad para realizar listas de cálculos fáciles y difíciles y generalizar. Por ejemplo luego de realizar los cálculos propuestos, analizar y poder construir junto a los alumnos: "si en una multiplicación un factor es 1 entonces nos da el mismo número", "si en una multiplicación uno de los factores es 0, entonces da siempre 0".

**Problema 9 -** Tabla del 4


a) 9

b) 32

c) 43

d) 54

**¿Cuál de los siguientes números está en la tabla del 4?**

*Actividad extraída de la Evaluación en línea*

"El ítem Tabla del 4 encierra una relación de proporcionalidad directa pero el niño puede resolverla correctamente sin tener presente esa condición, si recupera de su memoria lo trabajado en clase sobre las distintas tablas de multiplicar. En este caso puede llegar a la solución identificando el único múltiplo de 4 que está en las opciones o si suma 4 al último número que aparece en la parte superior de la imagen de la tabla (8) y reitera este proceso hasta llegar a un número que coincida con las opciones".

## c. Propiedades de la multiplicación

En los problemas multiplicativos, como ya se señaló para los aditivos, los alumnos irán utilizando en los hechos propiedades sin su denominación, que se irá incorporando más adelante.

Al analizar los diferentes procedimientos se podrá reflexionar acerca de qué transformaciones son posibles para obtener el mismo resultado y cuáles no.

## Problemas para analizar propiedades de la multiplicación

**Problema 1**

Renata compró una lata de 20 kilos de pintura, para pintar su casa. Como no le alcanzó, compró otra lata de 4 kilos. El kilo de pintura cuesta $50.

A. ¿Cuántos kilos de pintura compró?

B. ¿Cuánto dinero gastó?

Posibles formas de resolver:

Romina calculó mentalmente los kilos de pintura: 20 + 4 = 24. Para calcular el gasto, realizó: 50 x 24 y lo presenta por descomposición multiplicativa en 50 x 2 x 12 y asociando como 100 x 12 = 1200.

Germán se plantea: en total compró 20 + 4 = 24 kilos de pintura. Pero para calcular cuánto dinero gastó se plantea, primero compró 20 kilos y luego 4 más, entonces: 50 x 20 + 50 x 4 = 1000 + 200 = 1200.

Ambos procedimientos son correctos y su validez se sustenta en la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición: 50 x (20 + 4) = 50 x 20 + 50 x 4.

### Problema 2

La maestra propuso a los alumnos hacer este cálculo en la calculadora: 21 x 4.

En la calculadora de María no funciona la tecla 4. ¿De qué manera puede resolverlo?

Algunas formas de resolución que utilizaron los niños:

2 x 21 x 2 　　　　 21 x 2 x 2 　　　　 21 x 3 + 21

En la puesta en común, a partir de algunas de estas resoluciones, el grupo discutirá y comprobará que se obtiene el mismo resultado, verificando que pueden conmutar y asociar (sin necesidad de utilizar los nombres).

Son todos procedimientos que pueden surgir en un grupo, sin mencionar propiedades por su nombre. En definitiva, la conclusión más general es que en muchos de los procedimientos desplegados por los niños, están utilizando naturalmente las propiedades de las operaciones y es importante encontrar con los alumnos explicaciones a ese funcionamiento.

El docente, sin pretensión de apurar procesos, e incluso sin introducir vocablos prematuros (conmutativa, asociativa) puede propiciar reflexiones que acrecentarán la madurez y el sentido numérico de los niños.

Se puede modificar el problema utilizando como variable que la tecla que no funciona represente un número primo. (El docente tendrá como recurso, restringir a los alumnos la posibilidad de expresar ese número como composición de varios factores).

A) 21 x 4 + 21; 　　　 B) 21 x 4 + 1;

C) 2 x 2 x 21 + 21; 　　　 D) 21 x 2 x 2 + 21.

El docente a partir de estas resoluciones de los alumnos promoverá un intercambio en el aula animando a los niños a explicar sus procedimientos de cálculo. Si los niños en su intercambio no logran una explicación, el maestro promoverá el análisis a partir de interrogantes ¿por qué a 21 x 4 se le suma 1 en la resolución B? (Es probable que expliquen que surge de la descomposición de 5 como 4 +1). ¿Cuál es la diferencia entre la resolución A y la B? ¿Qué sucede cuando expreso 21 x 5 como la suma 21+21+21+21+21? ¿Es lo mismo que 21 x 4 + 1?

Salvo en el segundo cálculo, se comprobará que el resultado es efectivamente 21 x 5. En el diálogo se observará y se podrá verificar con la calculadora que es posible disociar 4 expresándolo como 2 x 2 y también que los productos 4 x 21 y 21 x 4 dan el mismo resultado. Incluso el docente podrá mostrar que 21 x 5 = 21 x 4 + 21 x 1 destacando que esto funciona y es correcto pues 4 + 1 = 5 (propiedad distributiva).

## Anexo: Repertorios de cálculo mental

Los repertorios de cálculo mental a trabajar en cada año se organizan en el cuadro siguiente:

| PRIMER AÑO y NIVEL INICIAL | SEGUNDO AÑO | TERCER AÑO |
|---|---|---|
| **Sumas de números iguales menores e iguales que 10**<br>Por ejemplo:<br>1 + 1<br>2 + 2; …… (desde Nivel Inicial) | **Dobles y mitades de números inferiores a 10**<br>Por ejemplo:<br>el doble de 2 es ….<br>la mitad de 6 es …… | **Dobles y mitades de múltiplos de 10 y de 100**<br>Por ejemplo:<br>doble de 20; 30; 60; 150; 250; etc.<br>mitad de 40; 50; 100; 300; 400; etc. |
| **Sumar 1 y restar 1**<br>Agregar y quitar 1<br>Por ejemplo:<br>3 + 1 = 4, 4 + 1 = 5, ….<br>4 - 1 = 3; 5 - 1 = 4 (desde Nivel Inicial) | **Sumar 10 y restar 10 a números de 2 y 3 cifras**<br>Por ejemplo:<br>48 + 10; 375 + 10<br>85 - 10; 567 - 10 | **Sumar 100 y restar 100 a números de 3 y 4 cifras** |
| **Escalas ascendente y descendente de 1 en 1.** | **Escalas ascendente y descendente de 2 en 2, 5 en 5 y 10 en 10.** | **Escalas ascendente y descendente del 10, 20, …. , 100, 200, ….** |
| **Sumas de dos números que dan 10 y complementos a 10**<br>Por ejemplo:<br>6 + 4 = 10<br>10 - 6 = 4; 10 - 4 = 6 | **Sumas de múltiplos de 10 que dan 100 a partir de sumas que dan 10**<br>**y complementos a 100**<br>Por ejemplo:<br>Si 8 + 2 = 10; 80 + 20 = 100<br>Si 80 + 20 = 100; 80 + …. = 100 | |
| **Sumas de números de una cifra y restas asociadas**<br>Por ejemplo:<br>3 + 6 = 9<br>9 - 3 = 6; 9 - 6 = 3 | | |
| **Sumas de múltiplos de 10 a partir de sumas de dígitos**<br>Por ejemplo:<br>3 + 6 = 9<br>30 + 60 = 90 | | |
| **Escrituras equivalentes de números hasta 100, algunas vinculadas con la organización del sistema decimal**<br>Por ejemplo:<br>48 = 40 + 8; 48= 50 - 2<br>23 = 10 + 10 + 1 + 1 + 1; 23 = 10 + 13<br>7 = 5 + 2; 7 = 6 + 1; 7 = 4 + 2 + 1; etc. | **Escrituras equivalentes de números hasta 1000, algunas vinculadas con la organización del sistema decimal**<br>Por ejemplo<br>735 = 700 + 30 + 5<br>735 = 500 + 200 + 20 + 10 + 5 | **Escrituras equivalentes de números hasta 10000, algunas vinculadas con la organización del sistema decimal**<br>Por ejemplo<br>1425 = 1000 + 400 + 20 + 5<br>1425 = 500 + 500 + 400 + 25 |

| | | |
|---|---|---|
| | **Agregar y quitar un número entero de decenas o centenas en números de 2 y 3 cifras.**<br>Por ejemplo:<br>45 + 30; 45 - 30<br>364 - 200; …364 + 200 | **Agregar y quitar un número entero de decenas o centenas a números de 4 cifras.**<br>Por ejemplo:<br>6732 - 200; …1580 + 200 |
| | **Cálculos de complementos de un numero cualquiera respecto de un número "redondo"**<br>Por ejemplo:<br>57 + …. = 200 | **Cálculo de la distancia entre dos números de 2 o 3 cifras**<br>Por ejemplo:<br>578 + ……….. = 633 |
| | **Calcular productos x 2; x 3; x 4; x 5.** | **Calcular el producto de dos números menores que 10** |
| | | **Establecer relaciones entre productos.**<br>Por ejemplo:<br>multiplicar dos veces o tres veces por 2<br>6 x 2 x 2 = 6 x 4<br>7 x 8 = 7 x 2 x 2 x 2<br>multiplicar x 2 y dividir : 2<br>5 x 2 : 2 |
| | | **Multiplicar números de 2 y 3 cifras por 10**<br>Por ejemplo<br>48 x 10, 327 x 10 |
| | | **Estimar el resultado de divisiones** de números de 2 y 3 cifras por números de una cifra.<br>Por ejemplo:<br>¿entre qué números estará el cociente de dividir 78 : 4? ¿Y de 435 : 3? ¿Y de 435 : 5? |
| **Propiedades conmutativa y asociativa de la suma** | | **Propiedades conmutativa y asociativa de la suma de la multiplicación** |

# Capítulo 4: Geometría en el Primer Ciclo

## 4.1 Consideraciones curriculares

### a. El trabajo en geometría en el Primer Ciclo

El trabajo geométrico en la escuela primaria tiene ciertas características que atienden a factores de distinta índole. Sin embargo, un factor que no puede quedar fuera del alcance de esta descripción es a qué se considera problema geométrico.

Según Itzcovich y otros (2005), un problema es un problema geométrico cuando para resolverlo se ponen en juego propiedades de los objetos geométricos. A su vez enfrenta a la interacción del alumno con objetos que no pertenecen al espacio físico sino a un espacio conceptualizado representado por las “figuras-dibujo”. Estas representaciones no cumplen, en la resolución del problema, la función de llegar a la solución del mismo a través de la constatación sensorial. Son figuras para pensar. Además la gestión del problema por parte del docente pone el foco en que los alumnos, de forma autónoma, arriben a la solución del problema a través de las propiedades de las figuras. A partir de este juego se produce conocimiento nuevo como resultado del proceso de buscar relaciones entre las propiedades que ya conocen y las que no, para resolver la actividad articulando con la correspondiente validación.

En el marco curricular vigente encontramos: "Se propone un enfoque didáctico que enfatice la construcción de significados a través de la problematización del conocimiento geométrico" (PEIP, 2008, pág. 76). En este sentido es entonces que concebimos la construcción de conocimiento geométrico al establecer relaciones entre los problemas geométricos que se proponen en el aula, la problematización de las propiedades de las figuras geométricas y la gestión docente tomando las decisiones pertinentes.

### b. Avances en el Primer Ciclo y recorrido en el Programa de Educación Inicial y Primaria

Los perfiles de egreso de tercero dan pistas para trabajar alrededor de las características de las figuras del plano y del espacio para explorarlas, reconocerlas, identificarlas, describirlas y reproducirlas de diversas formas. A partir de esas acciones se podrá desarrollar la construcción de relaciones de las propiedades de las figuras.

Puede ser un buen comienzo el trabajo con actividades de exploración y reconocimiento para que luego las ideas construidas a partir de ellas avancen dejando lo perceptivo de lado con el fin de que los alumnos se posicionen en las características geométricas de las figuras. Algunas de estas características que se pueden estudiar son, por ejemplo: los lados, sus longitudes, sus posiciones relativas (paralelismos y perpendicularidad), los vértices, el número de vértices, las formas de las caras, el número de caras, los ángulos interiores de las figuras del plano y las relaciones entre esos elementos.

También será necesario a lo largo del ciclo introducir actividades que involucren descripciones de una forma geométrica, de copia, de construcciones sencillas, actividades de plegado, recortado, etc.

La diferencia a lo largo del Primer Ciclo en el tipo de problemas estaría dada por las figuras, tanto del plano como del espacio, y las propiedades a trabajar que se incluyan en ellos. También en las actividades de copia y de construcción no solamente el tipo de figura y las propiedades que se incluyan en ese estudio sino también estará en juego el tipo de papel y los instrumentos de geometría.

En los primeros años, la idea es que algunas actividades puedan ser validadas empíricamente pero que, a medida que se avance en el ciclo, la producción de alguna explicación que se produzca pueda ser motivo de comenzar a construir las relaciones geométricas con base en las propiedades de las figuras en juego.

A medida que se desarrolle el recorrido geométrico los alumnos podrán incorporar vocabulario que ayudará a las tareas de comunicación con el fin de caracterizar mejor las propiedades de las figuras estudiadas.

En este sentido, como en todo trabajo matemático del ciclo, se podrán encontrar caracterizaciones provisorias e inacabadas en el estudio de las figuras y sus relaciones. Sin embargo, desde NI5 a tercer grado a través de las actividades de enseñanza será importante evidenciar avances en las caracterizaciones, en los tipos de construcciones y en las relaciones que se van construyendo con el fin de saber si la resolución del problema es válida o no.

## c. Contenidos programáticos y perfiles

Al analizar en el PEIP del año 2008 encontramos los contenidos programáticos correspondientes a Geometría organizados según si las figuras son del plano o del espacio.

En los dos cuadros siguientes se asociaron los contenidos de cada año escolar con los tipos de actividades geométricas que aparecen en los perfiles: reproducir figuras y reconocerlas, comparar figuras e identificarlas, describir figuras o construirlas.

### Figuras planas

| Año | Contenidos ligados a los perfiles |
|---|---|
| **Cinco años** | "Dibujo" a mano alzada de polígonos y no polígonos.<br>La diferenciación de polígonos. |
| **Primer año** | **Relaciones entre figuras:** número de lados, de vértices, longitud de los lados. Las figuras circulares y otros no polígonos.<br>Clasificación de figuras por el número de lados. Las líneas curvas, rectas y mixtas. |
| **Segundo año** | **Elementos de los polígonos:** lado, vértice. Lado como segmento de recta. Vértices y lados consecutivos y opuestos. Las rectas paralelas. En particular los "lados paralelos".<br>Composición de polígonos y no polígonos con diferentes figuras. |
| **Tercer año** | Profundizar diferencias entre polígonos y no polígonos. Características de polígonos: número de lados, de vértices, longitudes de los lados y posiciones relativas de los mismos. Clasificación de polígonos por el número de lados.<br>**Las posiciones relativas de rectas en el plano.** Perpendicularidad y paralelismo.<br>**Ángulos interiores de los polígonos.** Ángulo recto como caso particular. La perpendicularidad de dos rectas secantes y la determinación de cuatro regiones congruentes (ángulo recto determinado por dos rectas secantes perpendiculares).<br>Las figuras. Circunferencia y círculo.<br>**Propiedades de los triángulos.** Ángulos interiores de los triángulos. Representación de ángulos. |

## Figuras del espacio

| Año | Contenidos ligados a los perfiles |
|---|---|
| **Nivel inicial** | **Primera diferenciación de poliedros:** prismas y pirámides. Características de los no poliedros: cilindros, conos y esferas.<br>La diferenciación de poliedros: prismas y pirámides<br>La composición de figuras con poliedros y no poliedros. |
| **Primer año** | **Elementos en los poliedros y no poliedros:** caras (superficies planas), aristas y vértices en los poliedros.<br>Las bases en el cilindro y el cono (superficies planas). |
| **Segundo año** | **Relaciones entre los poliedros.** Relación entre prismas y pirámides: caras y bases de los poliedros. Características de los no poliedros. El cilindro y el cono. Las superficies (cilíndrica y cónica), bases y cúspide. |
| **Tercer año** | **Relaciones entre poliedros.** Características prismas y pirámides. Las relaciones en los no poliedros. Características de la esfera, cono y cilindro.<br>Planos no secantes: paralelos (como las posiciones de las bases en los prismas).<br>Distintas representaciones de un poliedro. |

Al considerar el siguiente cuadro en relación con la lista anterior de contenidos programáticos año a año se advierte que los perfiles de egreso de tercer año derivan, para cada tipo de actividad, de la secuenciación planteada.

| Conceptos y contenidos programáticos vinculados | Perfil de egreso de tercero |
|---|---|
| **Figuras planas:**<br>Polígonos y no polígonos.<br>Propiedades.<br>Relaciones inter e intrafigurales. | **Reproducir y reconocer** figuras geométricas del plano en función de sus características:<br>- n.° de lados y vértices,<br>- congruencia de lados. |
| | **Identificar propiedades** comunes y no comunes en la comparación de figuras. |
| | **Describir** figuras en función de sus características. |
| | **Realizar construcciones** sencillas utilizando distintos instrumentos geométricos, soporte físico y virtual. |
| **Figuras espaciales:**<br>Poliedros y no poliedros. Propiedades.<br>Relaciones inter e intrafigurales. | **Reproducir y reconocer** figuras geométricas del espacio en función de sus características:<br>- tener o no caras,<br>- n.° de caras, aristas y vértices,<br>- congruencia de caras, aristas y vértices. |
| | **Identificar propiedades** comunes y no comunes en la comparación de figuras. |
| | **Describir** figuras en función de sus características. |
| | **Realizar construcciones** sencillas utilizando distintos instrumentos geométricos, soporte físico y virtual. |

# 4.2 Familias de problemas

## a. Reproducir y reconocer figuras planas y del espacio

### ¿Qué tipo de actividades son las de reproducción y reconocimiento de figuras?

Si se entiende que el dibujo de una figura geométrica es una de sus representaciones posibles, es factible considerar diferentes tipos de actividades que permiten realizar ese dibujo. Entre esas actividades, es interesante proponer en la escuela primaria distintos tipos en las que no hay que construir la figura a partir de un conjunto de datos –como ocurre en las clásicas actividades de construcción– sino que hay que reproducir un dibujo de la figura deseada que ya se tiene. En ese sentido, los datos están ofrecidos de otra forma, a partir de la figura dada como modelo. Como veremos, hay variantes en las actividades de reproducción que se irán mostrando en la familia de problemas.

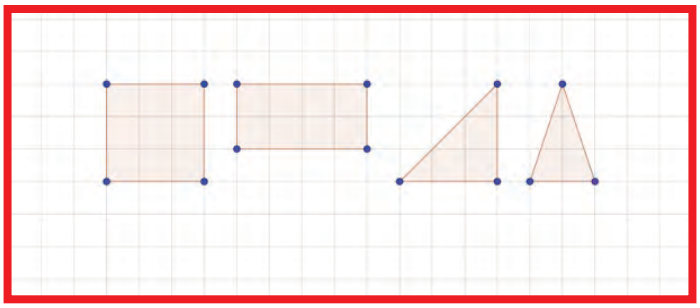
### ¿Qué tipo de problemas presentar?

Es posible considerar que la realización del dibujo de una figura geométrica es un problema para los alumnos y, en este sentido, veremos a continuación variantes de actividades de copia que permiten a los niños invertir conocimientos que ya poseen y producir otros nuevos.

## Problemas para reproducir y reconocer figuras planas

**Problema 1**

Copien en papel cuadriculado[4] las siguientes figuras. Tienen que ser exactamente iguales.



Dejar un modelo por mesa o pegarlo en el pizarrón, el tener cerca o lejos el modelo a ser copiado será una variable que los docentes deberán considerar para analizar qué procedimientos habilita y cuáles no. Si el modelo está lejos habrá que decidir cuántas veces un alumno se puede acercar a analizar las figuras a ser copiadas. Las figuras sugeridas no están elegidas al azar. Se presentan dos cuadriláteros y dos triángulos.

El maestro podrá decidir qué figuras elegir para copiar de acuerdo a las características de su grupo.

Si fuese NI5 se podría pensar en el copiado del cuadrado y en vez de hoja cuadriculada tal vez convendría que fuese centimetrada con el fin de que los niños puedan manejar mejor sus trazos e identificar algunas de las características propias del cuadrado: cuatro lados iguales, cuatro vértices, cuatro "lados derechitos" (como sinónimo de ángulos rectos).

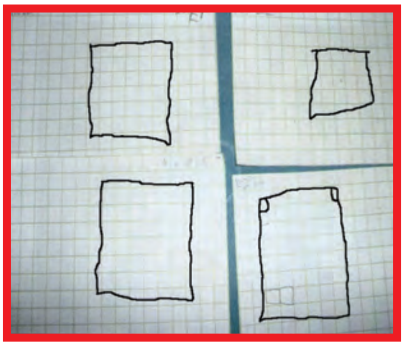
Las producciones que se adjuntan fueron realizadas por un grupo familístico de una escuela pública en el marco de un curso de formación en Servicio. Se les había ofrecido a los niños un cuadrado que se encontraba pegado en el

[4] Puede ser centimetrado.

pizarrón. Los niños debían reproducirlo de manera individual, en una hoja centimetrada, igual que en el modelo. Podían ir al pizarrón a fijarse en lo que quisieran para poder reproducirlo.

**Procedimiento 1**

Estos niños no logran dibujar el cuadrado. Sin embargo la producción de la derecha da cuenta de un remarcado sobre los lados tratando de mostrar en su figura que los lados son “derechitos” como sinónimo de rectos.

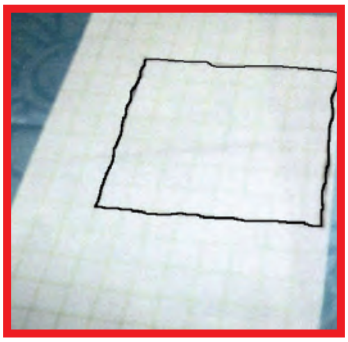


**Procedimiento 2**

En las tres producciones que se adjuntan la maestra les pregunta a los niños en qué se fijaron para hacer esta figura y ellos respondieron con las siguientes características:

- Tiene 4 lados.
- Tiene 4 “puntas” (por vértices).
- Tiene lados derechitos (para marcar los ángulos rectos).

Sin embargo aún no usan como referencia la cuadrícula. El último tiene un intento de conteo de cuadraditos para identificar la longitud de los lados, se visualizan en la foto cinco cuadritos marcados.



**Procedimiento 3**

Este alumno usa los lados de la hoja centimetrada para representar el cuadrado. Conoce del cuadrado que tiene 4 lados iguales, 4 vértices y 4 ángulos rectos (en palabras del niño: “derechitos”).

En un primer año o segundo año podrían presentarse, en una primera instancia, los dos cuadriláteros y en otra actividad los dos triángulos. Esta opción permitiría analizar que los cuadriláteros propuestos no son iguales, es decir que hay polígonos con 4 lados que pueden ser distintos. Esta distinción de que no todos los cuadriláteros son cuadrados es sustantiva para comenzar a fijarse en otros elementos que no sean solamente el número de lados como por ejemplo su longitud. La actividad permite identificar en esta característica qué diferencia al rectángulo y al cuadrado porque el papel ofrecido lo habilita.

Como sistematización[5] de esta actividad podrían circular en la clase ideas a ser tomadas por la maestra como la que sigue: *"No alcanza con contar los lados para copiar la figura. Hay que fijarse cómo son los lados".*

Asimismo, tanto para segundo año como para tercer año si se decide presentar solamente los cuadriláteros se puede ahondar en el paralelismo y la perpendicularidad de los lados apoyados en el tipo de papel que se presenta.

En los cuatro niveles durante la puesta en común de la actividad es relevante analizar en qué se fijaron para copiar las figuras, como preguntó la maestra de nivel inicial en las producciones que hemos presentado. Confrontar en lo que se fijaron ayuda a centrarse en las propiedades de las figuras según sea el grado: número de lados, longitud de los mismos, número de vértices, paralelismo y perpendicularidad de los lados.

En relación a la perpendicularidad de los lados se podrá pensar que estas actividades habilitan posteriormente a discutir que esos lados perpendiculares (segmentos de recta) están contenidos en rectas que heredan esa condición de perpendicularidad de los lados. Esta relación la profundizaremos en los perfiles que corresponden a la "descripción de figuras…" y "realizar construcciones…".

También la actividad permite en un tercer año discutir la idea de que el número de lados y de vértices no es suficiente para clasificar afinadamente las figuras planas ofrecidas. Están en juego además las longitudes de ellos y los ángulos entre los lados de las figuras. Esta característica se evidencia cuando se comparan los dos cuadriláteros y los dos triángulos.

Podría profundizarse la conclusión abordada en primero y segundo y avanzar a: "*Además de fijarnos en la cantidad de vértices o de lados también tenemos que fijarnos en la longitud de los lados y los ángulos que hay entre ellos*".

La validación de la copia realizada por el alumno "si es buena o no" lo da la propia actividad porque se puede superponer a trasluz y ver si quedaron iguales o no las figuras reproducidas por el niño comparadas con las figuras dadas. Si no es adecuada la copia se podrá volver a analizar qué "cosas" no se han mirado aún y qué ayudaría a mejorar esa reproducción de las figuras. Esas "cosas" no miradas son las propiedades de las figuras que se necesitan para reconocerlas y reproducirlas adecuadamente.

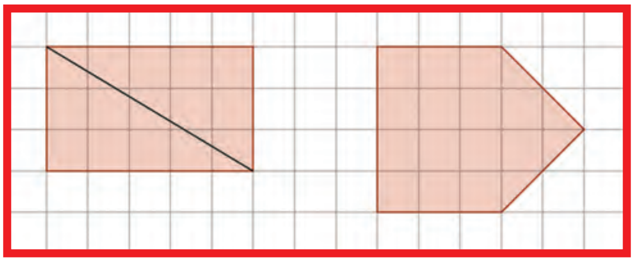
La idea es que se pongan a discusión las diferentes producciones completas o no para avanzar sobre las propiedades de las figuras. No es el maestro que debe decir lo que faltó mirar sino que en la discusión, seguramente, las miradas distintas de los niños van completando lo que un alumno evidenció y otro no y de esa manera se completa todo lo que hay que "ver" de la figura.

Al usar el término "ver" no nos referimos solo una simple observación perceptiva sino a mirar con ojos geométricos. Esto implica poner en un primer plano las propiedades de esos objetos sin importar aún como se expresan.

[5] La idea de sistematización usada como cierre provisorio de lo que ha circulado. Por ejemplo "hasta ahora tenemos…". Ese "tenemos" serán propiedades que los alumnos se fijaron al copiar las figuras.

### Problema 2

Copien en papel cuadriculado[6] las siguientes figuras. Tienen que ser exactamente iguales.



Este problema avanza sobre el anterior porque cada figura que se ofrece está compuesta de otras dos, si consideramos el rectángulo formado por dos triángulos rectángulos iguales.

También se puede pensar en el rectángulo con una de sus diagonales representadas.

Se continúan estableciendo relaciones entre las propiedades de los polígonos con el fin de que los alumnos las usen en acto para poder reproducirlas. Para reconocer las propiedades explícitamente de número de lados, de vértices, longitud de los lados, si es o no polígono, será imprescindible la puesta en común de la actividad. Retomar lo abordado en el problema 1 servirá para poder copiar estas figuras.

Si no se ha trabajado la idea de diagonal, esta se puede "ver" como una "rayita" que divide al rectángulo a la mitad o si la figura se reconoce como "dos triángulos iguales pegados", entonces es posible discutir el número de lados de las figuras presentadas.

En la figura del rectángulo con la diagonal podría aparecer que la "rayita" de adentro sea contada como lado del polígono. Es un buen momento para volver sobre la discusión de lo que es considerado lado[7] de un polígono. No es para trabajar con la definición que aparece en el pie de página pero sí se podrá abordar la idea de que los lados son segmentos de recta, que los extremos o las puntitas son los vértices "vecinos". Con estas consideraciones se descarta que la diagonal sea considerada lado. Es decir los lados son los que "forman el contorno" de la figura. De esta manera la figura sigue siendo un cuadrilátero con otro elemento marcado.

El pentágono o la "figura de cinco lados" se puede reconocer como "un rectángulo con un triángulo pegado". La discusión anterior también se puede dar para que no se cuente el lado del triángulo (que no está representado) pero que los niños al reconocer la figura como composición de triángulo y rectángulo lo cuenten.

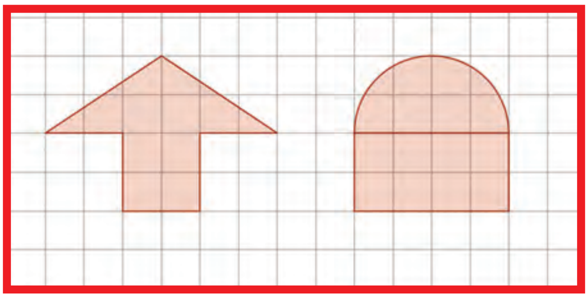
La validación de la actividad tiene las mismas características que la del problema 1.

A la hora de trabajar con el problema 2 se tendrán en cuenta las mismas consideraciones en cuanto al tipo de papel, la ubicación de los modelos, etc.

[6] Puede ser centimetrado.
[7] Lado de un polígono es un segmento de recta cuyos extremos son vértices consecutivos del polígono.

## Problema 3

Copien en papel cuadriculado[8] las siguientes figuras. Tienen que ser iguales.



Este problema avanza sobre el problema 2 pues hay un no polígono para copiar. Será necesario reconocer que es un medio círculo con un rectángulo con el cual comparten un diámetro o un lado del rectángulo. Además el primer polígono es un polígono no convexo[9].

La variable de qué figuras se están presentando en este problema es sustantiva a la hora de considerar los procedimientos de los niños. Podrán volver a aparecer las discusiones que atiendan a:

- ¿qué es lado?
- ¿hay "lados curvos"?

Además el heptágono[10] (polígono de 7 lados) es un polígono no convexo lo que lleva a una discusión que hasta ahora, en esta familia de problemas, no había aparecido. El tener que fijarse en qué miraron para poder copiarlo ayudará a expresar las propiedades elegidas por los alumnos. Durante la puesta en común se pondrán en evidencia estas cuestiones.

Otra variable que interviene es que en el enunciado no está el "exactamente" iguales pues al presentar un medio círculo, lograr que sea "exactamente igual" no interesa. Lo que sí está en juego es que esa figura es un no polígono porque no todos sus lados son segmentos de recta, hay una línea curva que forma parte de su contorno. Es decir que lo importante es que "se parezca" a esa figura, que sea de la misma clase.

Hasta ahora, **¿qué se podría sistematizar?**

A continuación ejemplificaremos con algunas propiedades que podrían circular en términos de alumnos. Esto no quiere decir que todas circulen en el aula. Quizás en algunas clases surjan estas y otras no. Dependerá de los conocimientos de los niños, cómo se dé la puesta en común, es decir, dependerá de la gestión del docente y lo que se vaya invirtiendo de un problema en otro. Entonces podrían aparecer por ejemplo:

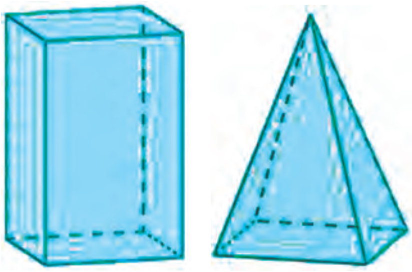
- "No alcanza con contar los lados para copiar la figura. Hay que fijarse cómo son los lados".
- "Hay que fijarse en el largo de los lados y en cuántos son".
- "Hay que fijarse cuántas puntas y cuántos lados tiene".
- "Un lado es una rayita (segmento) que une dos puntas seguidas".
- "Hay figuras que tienen lados curvos y otras rectos".
- "Los lados son solo derechitos los otros son líneas curvas".
- "Las figuras que tienen todos los lados derechitos son los polígonos".
- "Hay polígonos con lados para adentro y otros no".
- "Los lados son solo las líneas de afuera".

[8] Puede ser centimetrado.
[9] No es necesario llamarle así con los niños. Se podrá optar por decirle "el que tiene lados para adentro", etc. Hasta que las ideas circulen y sí se diferencie a las figuras además de por sus propiedades por su nombre.
[10] No es con el fin de nombrarlo heptágono, la idea es hablar de polígono de 7 lados con los niños.

## Problemas para reproducir y reconocer figuras del espacio

### Problema 4

De la caja de cuerpos se eligieron estos dos. Vamos a estampar las caras de ellos en cada hoja.



Se ofrecen dos hojas. En cada una se estamparán las caras de cada cuerpo por separado. En una hoja las caras del prisma y en otra las de la pirámide. No necesariamente se le dará el nombre, eso dependerá de lo trabajado hasta ese momento. Podría nombrarse al final de la actividad, luego de analizar las características que este problema habilita.

¿Por qué la elección de estas dos figuras del espacio? El reconocer, diferenciar y representar los poliedros para comenzar a caracterizarlos es un contenido que atraviesa desde NI4 a tercer año. La elección del prisma recto de base cuadrada y de la pirámide de base cuadrada no es ingenua. Son dos figuras del espacio que nos permiten analizar propiedades comunes y otras que las diferencian. En este sentido el estudio de las caras, o la cáscara de ellas habilita a reconocerlas como poliedros y a su vez a diferenciarlos.

En los sellados que se obtienen aparecen para el prisma recto de base cuadrada rectángulos y cuadrados y para la pirámide aparecen triángulos y un cuadrado.

Todos son polígonos, sus lados son segmentos de recta, sin embargo no todas las figuras planas obtenidas por el sellado son del mismo tipo de polígono: hay cuadriláteros y triángulos.

Este reconocimiento por sus caras hace a una de las diferencias sustantivas entre prismas y pirámides.

Luego del sellado en grupos o en forma individual, el maestro podrá poner durante la puesta en común el foco en qué figuras planas se obtuvieron y organizar esta discusión a partir de estas preguntas, entre otras:

- ¿Cómo son los sellados de cada cara de cada figura?
- ¿Por qué les parece que hay algunas figuras iguales y otras no?
- ¿Cuántas caras tiene cada figura?

Las respuestas que surjan explicitarán qué características geométricas conocen los niños de esas figuras en relación al tipo de polígonos que forman las caras de esos poliedros. Se podrá hipotetizar por qué el prisma tiene dos cuadrados iguales y la pirámide una sola cara cuadrada.

A partir de la caracterización de otras pirámides y otros prismas, aunque no se hayan sellado, se podrá reconocer que en las pirámides “siempre hay triángulos” y en el prisma no necesariamente, a no ser que sea de base triangular y en ese caso solo aparecen 2 triángulos.

En el análisis de otro perfil se retomarán estos aspectos aquí presentados en cuanto a discutir si existe relación entre el número de triángulos y la base.

Una variante interesante es modificar las figuras a sellar porque carga de sentido el poder reconocer las caras con el cuerpo en cuestión. Por ejemplo, se podrá presentar un prisma de cualquier base y un cilindro o cono y comparar las huellas obtenidas. De igual manera es sustantivo pensar qué huella produce una esfera. Estas huellas obtenidas por sellados habilitan reconocer las diferencias entre poliedros y no poliedros. Por ejemplo, tanto el cilindro como el cono producen una huella particular: el círculo. Por otro lado no producen huellas las superficies laterales, solo dejan una línea. Los distintos sellados funcionan como representaciones de las figuras del espacio permitiendo profundizar las características con figuras del plano ya estudiadas o como forma de comenzar su estudio.

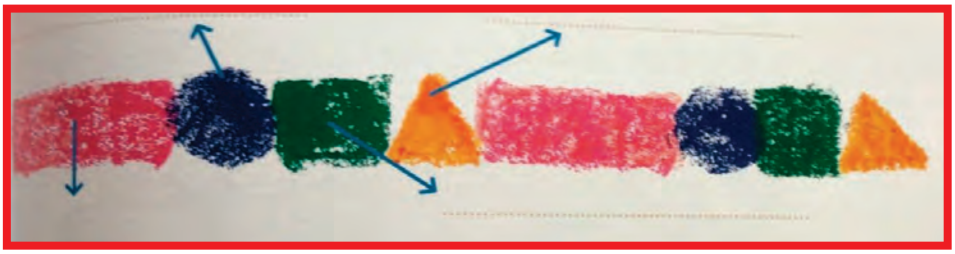
Estas actividades pueden ser una oportunidad para acordar los nombres de las figuras con el fin de usarlos después para comunicarnos mejor en cuanto al reconocimiento de propiedades y representaciones de estas figuras.

**Problema 5**

Anita y Víctor dibujaron la guarda con huellas de distintas caras de los cuerpos.

¿Qué cuerpos usaron para hacerla? Escriban el nombre del cuerpo que corresponda.

¿Algunas de las huellas puede ser hecha con distintos cuerpos? ¿Cuál o cuáles serían esos cuerpos?



El problema 5 profundiza el estudio de las caras de los poliedros del problema 4 y avanza sobre los no poliedros. Problematiza el reconocimiento del cuerpo[11] a partir de las huellas obtenidas por sellado.

La resolución de la actividad exige imaginar a qué cuerpo podrá corresponder cada huella a partir de las discusiones dadas anteriormente en la gestión del problema 4. Además, este problema habilita a varias posibles soluciones. La argumentación sobre la decisión tomada será relevante para identificar huella-poliedro o no poliedro.

Si se analiza a qué cuerpo corresponden los triángulos, estos no tienen por qué ser caras solamente de pirámides, pueden ser caras de los prismas de base triangular o de otros poliedros como por ejemplo el octaedro (poliedro de 8 caras).

Por otro lado, lo mismo sucede con los círculos que podrán ser las bases tanto del cono como del cilindro. Sin embargo, una respuesta esperable es que los niños identifiquen el círculo con una posible huella de la esfera. En este caso será necesario realizar huellas de esferas para observar que solamente queda “un punto grueso” y no un círculo.

Si la respuesta de asociar la esfera con la huella del círculo no surgiera es importante que el docente intervenga en ese sentido preguntando: ¿qué huella dejará la esfera? A partir de las hipótesis manejadas por los alumnos podrían considerarse otras actividades de sellado. Esto genera otra actividad dentro de esta familia de problemas.

La elección de los cuerpos es una variable determinante porque dará las posibilidades de discusiones y de generalizaciones a través de la producción de huellas (problema 4) y de la identificación de huellas (problema 5). Dependerá del grado en que se proponga los cuerpos que se presenten y los enganches que se produzcan entre una y otra actividad.

[11] Usamos indistintamente la nominación de figuras del espacio o cuerpos.

La dificultad del problema 5 es mayor a la del problema 4 porque exige decidir sin hacer la huella a qué cuerpo pueden representar esos sellos.

Hasta ahora: ¿**qué se podría sistematizar**?

Bajo las consideraciones expuestas anteriormente, en términos de lo que dicen los alumnos, se podría ejemplificar con algunas ideas a partir del trabajo con esta familia de problemas.

Entonces podrían aparecer, por ejemplo:

- “Cada cuerpo tiene sus huellas”.
- “Hay cuerpos que tiene las mismas huellas”.
- “Estos, (señalando las pirámides) siempre tienen triángulos”.
- “Estos (por los prismas) tienen siempre huellas de 4 lados”.
- “Estos, (por cono o cilindro) no dejan huellas de triángulos ni cuadrados”.
- “El cono y el cilindro tienen huellas redondas”.

Algunas de estas ideas podrían circular en las aulas. Están expresados en términos de niño porque lo que nos interesa es dejar que se expresen y a partir de lo que ellos identifican poder comenzar a nombrar de otra manera. No es el objetivo de estos problemas nombrar las figuras, es una posibilidad para poder comunicarnos mejor y todos entender lo mismo.

En las frases elegidas se observa que todas ofrecen características de los cuerpos en juego. Es una posibilidad para diferenciar poliedro de no poliedro: “Estos [por los poliedros] tienen estas huellas: cuadrados, rectángulos [cuadriláteros], y triángulos. Y estos [por los no poliedros] tienen una huella que es una rayita o círculos”.
Según sea los poliedros a sellar serán las características a establecer.

¿Por qué los problemas forman una familia?

En este caso la familia de problemas 1, 2 y 3 atiende el mismo perfil con las características indicadas: número de lados y vértices e igualdad de lados. Conforma una secuencia porque se relaciona en el tipo de actividad presentada: actividades de representación, en este caso de copia. Además las propiedades que se trabajan en el problema 1 se invierten en el 2 y en el 3, logrando que los alumnos puedan caracterizar las figuras a través del número de lados, del número de vértices, de la longitud de los lados, del paralelismo o la perpendicular de lados. Asimismo, se espera que comiencen a reconocer los ángulos y las diagonales del rectángulo. En el problema 3 se presenta un polígono no convexo y un no polígono con el fin de habilitar en la puesta en común la discusión: “¿en qué se fijaron para copiarlos?”. Es así que aparecerán otras características que en el problema 1 y 2 no han puesto en juego, la diferencia entre polígono y no polígono y polígono convexo.

A su vez los problemas 4 y 5 tratan de figuras del espacio tendiendo puentes con las figuras del plano porque exigen caracterizarlas a partir de las caras de los cuerpos elegidos que se estudiaron en los problemas 1 al 3. En algunos casos los cuerpos no tiene caras porque pueden referirse a cilindro o cono. El problema 4 sigue siendo una actividad de representación, en este caso sellado para evidenciar de qué figuras se trata el sellado. A su vez, el problema 5 invierte y relaciona las figuras planas obtenidas por sellado con el fin de poder usar las características que se reconocieron para usarlas en la identificación sobre qué cuerpo sería plausible dejar esa huella. Con esto se pretende marcar la idea de tender puentes entre el trabajo geométrico del plano y del espacio con el fin de que no se vean como “geometrías distintas”.

## b. Comparar e identificar figuras planas y del espacio

### ¿Qué tipo de actividades son las de comparación e identificación de figuras?

Las actividades que pueden caracterizar este perfil son las relacionadas con las de comunicación y las de clasificación. Ambos tipos de actividades promueven establecer relaciones entre varias figuras a partir de las propiedades de las figuras en juego.

El cambiar los criterios de clasificación propicia poner el foco en características diferentes de las figuras. También son un buen espacio para que el lenguaje geométrico cobre sentido y no sea presentado de manera ostensiva. La exigencia de los problemas en comunicar las propiedades de las figuras en juego hace necesario el ponerse de acuerdo en el momento de "decir" esas propiedades o características.

Ambos tipos de actividades se complementan. Para comparar figuras tengo que fijarme en sus propiedades geométricas, para identificarlas también.

### ¿Qué tipo de problemas presentar?

Las actividades de adivinación de figuras son típicas en propiciar la comunicación. Ofrecer un conjunto de figuras, tanto del plano como del espacio, para identificar cuál se eligió de ese conjunto, hace necesario identificar las figuras por sus propiedades y compararlas necesariamente para saber qué cumplen y qué no cumplen.

Las variaciones con la forma de presentar las figuras: recortadas, dibujadas en papel liso o pautado, hará que ciertas propiedades se puedan comprobar no perceptivamente. El tipo de papel habilita a evidenciar ciertas propiedades. Por ejemplo, si el papel es cuadriculado se podrá contar los cuadritos para establecer relaciones de longitudes de lados. De igual manera se podrá evidenciar la posición relativa de los lados ya sean paralelos, perpendiculares u oblicuos.

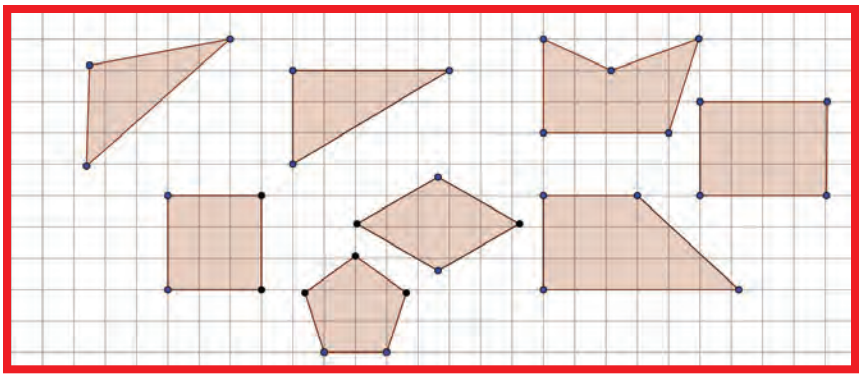
Asimismo, las actividades de clasificación ponen el foco en ciertas propiedades. Los conocimientos que ponen en juego los niños al resolver actividades de clasificación pueden ser sustantivamente distintos. Ofrecer la clasificación y buscar el criterio usado para ello es distinto que ofrecer un conjunto de figuras y que el alumno elija un posible criterio para clasificar. Ambas se complementan y posibilitan al maestro una gestión distinta. Si se ofrecen las figuras clasificadas podrá ser un buen momento para proponer criterios que los niños no hayan usado cuando ellos la hubiesen clasificado. Los problemas del tipo en ¿qué se parecen, en qué se diferencian? fomentan también la comparación y la identificación de figuras tanto del plano como del espacio. Serán las propiedades de dichas figuras las que habiliten a analizar las diferencias o semejanzas.

## Problemas para comparar e identificar figuras planas y del espacio

**Problema 1** - ¿Qué figura es?

De las siguientes figuras elegí una.

Ustedes, en equipo, para adivinar la figura que elegí, tienen que pensar preguntas que las responderé solamente con Sí o No. No pueden preguntar por el nombre de la figura.



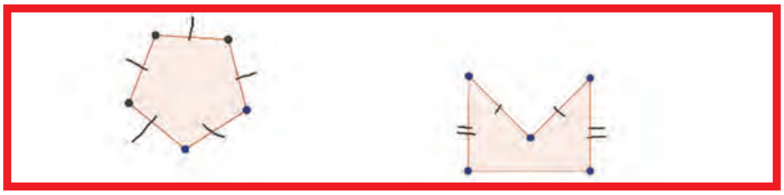
Esta es una actividad de comunicación pensada para un segundo o tercer grado por el tipo de polígonos y las relaciones que existen entre los mismos. El objetivo para el alumno es adivinar la figura en la que pensó la maestra dentro de la lista ofrecida. El recuadro con las representaciones funciona como lista. El objetivo de enseñanza es identificar las figuras a través de las propiedades para poder elegir la que se pensó. Por ejemplo, identificar número de lados, número de vértices, medida de los lados, quizás algo de ángulos ayudado por la cuadrícula que habilita a comparar con el ángulo recto.

Una variable a considerar es ofrecer las figuras recortadas en goma eva o cualquier otro material en vez de dibujadas. Si el material es papel se podrá doblar y encontrar otras propiedades que el cartón o la goma eva no permite determinar. Por ejemplo, si hay o no simetrías, si la longitud de los lados es igual al plegar. También con las figuras móviles aunque sean rígidas, se podría investigar si los ángulos y los lados son iguales pues el tipo de material habilita a tal acción a través de la superposición.

Asimismo, se puede seguir trabajando con papel cuadriculado o centimetrado al ofrecer representadas las figuras en una hoja para que el alumno tenga referencias no solamente perceptivas de las relaciones con respecto:

- al paralelismo entre los lados,
- a la perpendicularidad de los lados,
- a la igualdad entre la longitud de los lados.

Si se ofreciera en hoja lisa y se quisiera potenciar las relaciones anteriores y no habilitarlas solamente perceptivamente, se debería hacer otras marcas que identifiquen la perpendicularidad y la longitud comparada de los lados. Estas marcas deberán ser acordadas con los alumnos para que las puedan leer de manera adecuada como información pertinente de las figuras ofrecidas. A modo de ejemplo, donde aparece una misma marca indica que tiene la misma longitud. Algo similar se podría hacer con los ángulos.



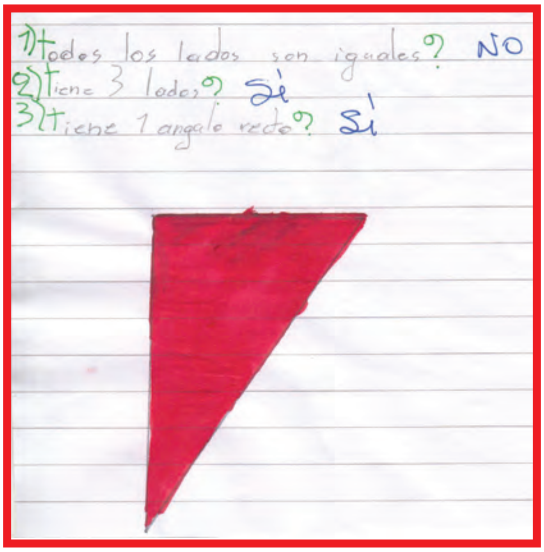
Continuando con el análisis del problema 1, las figuras elegidas son todas polígonos convexos y uno no convexo. Se podría incluir otro no convexo si esa fuese la figura elegida. De esta manera los alumnos tienen que realizar otras preguntas y no descartar el resto de las figuras al escoger solamente una pregunta que podría ser: “¿los lados se van para adentro?”. Las figuras presentadas están pensadas para seleccionar un cuadrilátero con el fin de que la cantidad de lados no sea suficiente para identificarla.

De igual modo todas las figuras puestas en la ficha tienen por lo menos dos posibilidades si se va por el número de lados. Si se elige un pentágono habrá que diferenciar entre las dos figuras de 5 lados. No alcanza en ningún caso con preguntar: ¿tiene 5 lados? o ¿tiene 3 lados?, etc.; pues hay dos posibilidades.

Es así que la cantidad de lados no es la única pregunta que despeja la figura que se debe adivinar. En términos de propiedades se está poniendo a discusión que el número de lados en esta lista de figuras no determina el polígono elegido. Luego de la puesta en común y de la discusión que se genera por las preguntas que se realizan al jugar varias veces a ¿qué figura es?, se podría generalizar: *“Saber solamente el número de lados de un polígono no alcanza para saber qué figura es”.*

Al igual que en la familia de problemas del bloque anterior, la variable tipo de figuras a presentar a los alumnos determina el objetivo a enseñar en relación a las propiedades a estudiar.

A continuación se presentan dos producciones de alumnos de un tercer grado cuando se propuso esta actividad. La figura elegida por la maestra en esa oportunidad fue el triángulo rectángulo.



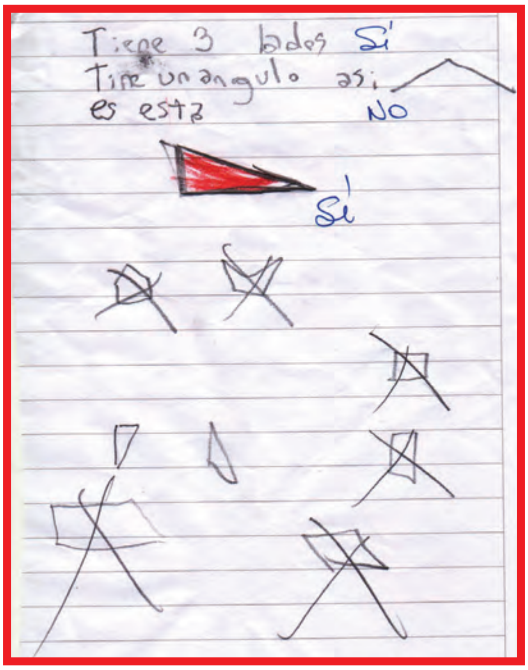

**Producción 1**

La primera pregunta que este alumno hace tiene que ver con la longitud de los lados. En las figuras presentadas tres figuras tienen esa condición: el cuadrado, el rombo y el pentágono regular.

Como la respuesta de la maestra fue “NO” realiza una segunda pregunta donde continúa poniendo el foco en los lados pero ahora en su cantidad no en su longitud. Esta respuesta es un “SÍ” entonces tiene dos posibilidades con triángulos: el obtusángulo y el rectángulo.

En su tercera pregunta pone el foco en los ángulos puesto que los lados de los triángulos no le proveían de más información ya que ambos triángulos son escalenos. Es así que se enfoca en el ángulo recto y consigue identificar la figura que la maestra había elegido.

En la última pregunta este niño seguramente eligió el ángulo recto porque es el que puede identificar quizás porque sea un aspecto del contenido ángulo ya abordado en su recorrido escolar.




**Producción 2**

La producción de este alumno muestra también tres preguntas de distinto tipo que las de la producción anterior. Obsérvese que con la primera pregunta ya se centra en dos figuras: triángulos. Sin embargo, como la cantidad de estas figuras no era única debe seguir afinando sus características para identificar la pensada por la maestra.

Para poder determinar cómo seguir, el alumno representó a mano alzada la colección de figuras ofrecidas por la maestra. De esa manera pudo tachar eliminando las que ya no le servían. Deja sin tachar ambos triángulos y entonces debe focalizarse en alguna característica que los diferencie. La amplitud angular es una de ellas y como no sabe el nombre del ángulo obtuso lo dibuja y pregunta: “¿tiene un ángulo así…?”. La representación figural del ángulo viene a completar la falta del nombre no impidiéndole abordar el problema. El cambio de registro de lenguaje natural a figural para completar su pregunta es sustantivo. La forma de coordinar ambos registros lo ayuda a poder resolver la situación. Al obtener la respuesta “NO”, elige el que le quedaba y como tampoco tiene la etiqueta de su nombre vuelve a utilizar el registro figural para ofrecer su respuesta de manera correcta. Así logra determinar la figura elegida por la maestra.

Las dos producciones muestran procedimientos distintos con respecto al tipo de registro y con ello se evidencian las propiedades que manejan los alumnos. La actividad es lo suficientemente potente y la gestión de la maestra es sustantiva en la manera de elegir que los niños escribieran las preguntas. De esta forma ella iba respondiendo a cada alumno o equipo, las respuestas en “silencio”. Esto permite que los alumnos queden con su registro y puedan identificar en qué otras propiedades de las figuras se podrían fijar a la luz de su pregunta anterior. A su vez, les queda escrito el proceso de selección con la posibilidad de que si realizan preguntas que no los ayudan a avanzar en la identificación de la figura puedan, luego, volver sobre ellas para mejorar el número de preguntas realizadas.

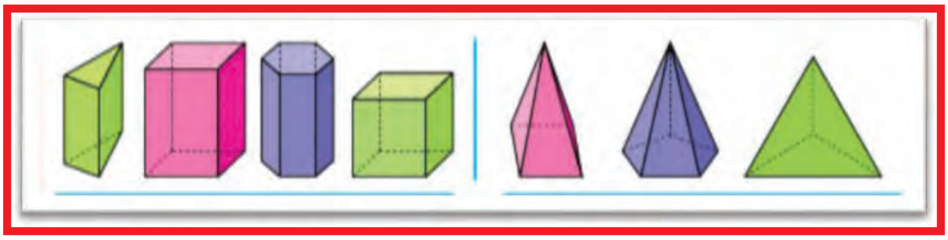
Para el NI5 se podrían dejar los triángulos y los cuadriláteros: rectángulo, cuadrado y trapecio con el fin de discutir no solamente el número de lados sino algo más en relación a ellos. Por ejemplo, posiciones relativas entre los lados: "van derechitas y no se cortan", "están paraditas y acostaditas así…", intentando identificar si son paralelas o perpendiculares. La idea no es que se presenten los términos paralelos y perpendiculares sino que los alumnos puedan percibir que esas son características de las figuras en juego.

Lo mismo pude suceder en relación a las longitudes de los lados: "son iguales", "tiene uno largo y dos cortos", etc. También podrán atender y "mirar" los ángulos perceptivamente: "más abiertos", "más cerrados", o cualquier otra descripción similar que vaya en relación a esa propiedad geométrica de manera intuitiva. Volvemos a especificar que la idea no es introducir ni definiciones ni nombres sino caracterizar a partir de lo que los niños vayan identificando o la maestra pueda plantear para discutir con ellos.

Se puede pensar una variante del **problema 1** en relación a que se presenten algunos cuerpos en vez de polígonos e identificarlos según sus características. Es decir, los niños tendrán que "adivinar" el poliedro o el no poliedro elegido según las figuras que se ofrezcan.

### Problema 2

Silvia hizo estos dos grupos de cuerpos. Escribe en qué se fijó para agruparlos así.



A diferencia del problema 1 en este se ofrecen clasificadas las figuras del espacio. En este caso son todos poliedros y en particular la clasificación es en prismas y pirámides. Es una actividad que habilita a buscar el criterio, es decir, en qué propiedades se fijó Silvia para armar esos dos grupos.

Los cuerpos se pueden ofrecer dibujados como en la consigna o bien se pueden ofrecer físicamente elegidos de la caja de cuerpos o con cajitas que muestren formas distintas.

Las propiedades en juego son:

- El tipo de caras: rectángulos y triángulos como caras laterales.
- El número de caras que funciona como base: una o dos según sea prisma o pirámide.
- El número de caras, el número de aristas o vértices.
- Si los triángulos que "hay" concurren o no a un vértice "distinguido".

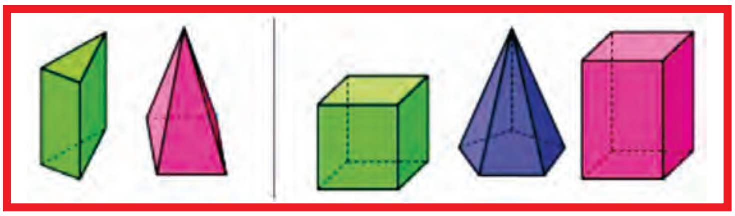
Algunas de ellas, según sean las que circulen en la clase, formarán parte de la sistematización para avanzar en estas propiedades de las figuras.

### Problema 3

Los cuerpos que se presentan en este problema ya estuvieron presentes en el problema 2. Es decir, se discutió sobre algunas de sus características. Pero ahora el foco está en buscar otro criterio.

En este caso cambió el criterio, es decir, alguna propiedad de los cuerpos y lo que antes estaba “junto” ahora está “separado” (comparando con el problema 1). Buscar en qué propiedad se habrá fijado Juan es relevante pues pone a discusión que los criterios son variables y dependen de lo que nos fijamos. En cada caso siempre son propiedades.

¿En qué se habrá fijado Juan para armar estos grupos?



Grupo A Grupo B

En la imagen de los grupos que armó Juan identifica el número de caras de los poliedros, en el grupo A son 5 caras y en le B son 6 caras. Ya no es en prismas y pirámides sino en algo que ellos tienen en común: las caras de ambos cuerpos son polígonos y en este caso son 5 o 6.

Tanto el problema 2 como el problema 3 pueden implementarse en primero, segundo o tercer grado según sea el grupo. El problema 2 y 3 con la variable de ofrecer los cuerpos se puede trabajar en NI5 pues identificar las caras con los cuerpos presentes en relación a su número establece puentes con la clasificación de polígonos por el número de lados usada en el problema 1.

Otra variable didáctica del problema 2 y 3 sería considerar poliedros y no poliedros para su identificación según sus características. Por ejemplo, en el problema 2 podría ofrecérseles cuerpos clasificados en poliedros y no poliedros. Para el problema 3 podrían ser pirámides y conos juntos, y prismas y cilindros en otro conjunto para habilitar discusiones sobre “lo que tienen y no tienen” en común. Las pirámides y los conos tienen en común “el vértice distinguido”, sin embargo la pirámide tiene caras laterales que son triángulos y el cono tiene una superficie curva como lateral. También se puede poner el foco en la figura que es la base: en el cono es un círculo mientras que en la pirámide necesariamente es un polígono.

Las mismas distinciones se podrían discutir entre cilindro y prismas: ambos tienen dos bases iguales y paralelas pero en los prismas estas son polígonos mientras que en el cilindro son círculos (no polígono).

Identificar estas propiedades en el conjunto de figuras presentadas habilita al alumno a reconocerlas en ellas, usarlas para clasificarlas y describirlas en el próximo perfil, así como también para la construcción de las mismas en el cuarto perfil. De este modo se espera que un perfil abone el trabajo geométrico en los otros construyendo redes de relaciones. Esta identificación de propiedades da insumos para la construcción de argumentos en el trabajo geométrico para que este no se torne solamente de memorización y rutinas, sino que se vuelva reflexivo y disponible.

## Problema 4

En qué se parecen y en qué se diferencian estas figuras:

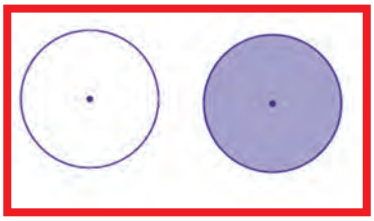


Figura 1 Figura 2

Este problema está pensado para un tercer grado pues el contendido círculo y circunferencia aparece por primera vez explicitado. Sin embargo, al analizar los aspectos del contenido de segundo grado en figuras del espacio se explicita: "Las características de los no poliedros. El cilindro y el cono". Aquí se necesita por lo menos comenzar a caracterizar estas figuras planas que funcionan como bases de los conos y los cilindros.

En este momento la idea es explicitar las propiedades de cada uno de ellos y analizar cuáles comparten y cuáles no.

Una primera aproximación a la resolución del problema puede ser "uno está pintada y la otra no". La identificación de esta característica habilitará a discutir en la clase qué significa eso en términos geométricos. Por ejemplo, se puede analizar que los puntos pintados de gris pertenecen a la figura 2, mientras que la figura 1 no tiene todos esos puntos identificados sino solo los de su contorno al igual que la figura 2. Es decir que se "ve" una diferencia que habrá que cargar con propiedades geométricas.

Por otro lado, se podrá decir "que las dos tienen un puntito adentro". Si no se explicita específicamente qué puntito es, el maestro podrá habilitar a discutir si es un punto cualquiera o está en un "lugar especial" de esas figuras. Para ello podrá medirse de alguna manera dónde está ese punto, qué característica tiene con los del contorno y qué característica tiene con los coloreados de gris de la figura 2. La regla graduada podría usarse naturalmente por parte de los niños para verificar esa situación u ofrecer piolas para comparar longitudes. Si los alumnos no consideraran el compás podría ser un buen momento para tomarlo como transportador de longitudes, siempre y cuando ya se hubiese trabajado con él.

Al comenzar a caracterizar los puntos pintados de gris en la figura 2 se podría evidenciar que todos están a igual o menor distancia de ese "punto gordito" y que los puntos de la figura 1 están siempre a igual distancia del "punto gordito". Aparecería entonces la característica principal de diferenciación entre circunferencia y círculo.

Obsérvese que es la primera vez que se nombran y que si se ha decidido proponer este problema justamente no es para haberlas definido antes. La idea es que este problema NO funcione "como evaluación" sino justamente lo contrario. Se pretende que esta actividad sea una instancia posible para disparar la identificación de las propiedades que caracterizan estas figuras planas.

Este problema se puede apoyar con otras actividades del tipo:

Dar dibujado el punto P. Por ejemplo:

xP

i) Ubica 15 puntos que se encuentren a 5 cm del punto P. ¿Qué figura forman?

i) Ubica 20 puntos que se encuentren ahora a 5 cm o a menos de P. ¿En qué se modifica la figura anterior?

A partir de las caracterizaciones que los niños evidencien y las discusiones que se den en la clase aparecerá la identificación de las propiedades comunes y no comunes a estas dos figuras.

Una variable didáctica para elaborar propuestas de este estilo para los otros grados es la selección de las figuras.

Por ejemplo, para NI5 podría presentarse en vez del círculo y la circunferencia algunos de estos pares de figuras:

- Un polígono y un no polígono, o
- dos polígonos de distinto número de lados, o
- dos poliedros distintos, o
- un poliedro y un no poliedro, etc.

Al pensar en este nivel puede convenir si son figuras del espacio, según el maestro considere las características de su grupo, ofrecer los cuerpos y si son figuras del plano se puede variar y ofrecerlas recortadas o dibujadas.

Evidentemente la discusión para resolver este problema en NI5: “en qué se parecen, en qué se diferencian” se podrá dar en forma oral en pequeños grupos o en binas para luego llevarlo a la discusión con el grupo completo con el fin de identificar las propiedades de las figuras que se seleccionen y analizar cuáles comparten y cuáles no. Puede ser un buen momento de acordar algunos términos, al identificar las propiedades, para que al comunicarlas “todos” se entiendan.

En un primer o segundo grado se podría variar las figuras según los contenidos programáticos que aparecen en el programa oficial.

Las mismas consideraciones son necesarias para tercer año, la presentación del círculo y de la circunferencia funciona solamente a modo de ejemplo.

Listar de forma escrita las características comunes cuando los niños ya escriben es decisivo para volver en otro momento sobre esta lista de propiedades, engrosarla o tachar otras que quedaron para su discusión. Este volver sobre lo realizado es parte del trabajo matemático que se quiere construir en primaria.

**Problema 5** - Roba montón geométrico

**Materiales:**

- Un mazo de cartas con figuras geométricas.
- Un segundo mazo de cartas que tengan enunciada alguna de las propiedades de las figuras que están en el otro mazo.

**Reglas de juego:**

Se coloca el mazo con las figuras geométricas en el centro de la mesa con las cartas boca abajo.

Un jugador por partida será quien reparta las cartas de las propiedades. Se repartirán tres cartas por ronda.

El jugador que reparte, al terminar de repartir las tres primeras cartas para cada jugador, dará vuelta cuatro (o todas) de las cartas del mazo de figuras, comenzando así la primera ronda respetando el turno hacia la derecha.
El primer jugador, si tiene entre sus cartas alguna que sea una propiedad de las figuras que están en juego sobre la mesa, tendrá derecho a llevársela. Deberá colocar entonces su carta de propiedades a su derecha junto a sí y la de figura encima. El segundo jugador, si tiene una carta que sea también una propiedad de las figuras en juego, puede elegir entre levantar otra figura de la mesa o robarse el montón del compañero en caso de que le sirva su carta.
La ronda termina cuando se reparten todas las cartas con propiedades, resultando ganador el que tiene más cartas.

Este juego ofrece la posibilidad de que en contexto lúdico se produzca la comparación de figuras centrándose en una característica de las mismas. Tiene la ventaja que, dependiendo de las características que interese trabajar, serán las cartas las que participarán en el juego. Esto es una variable sustantiva según el grado escogido o el nivel de dificultad que se quiera proponer.

Así, por ejemplo, para nivel inicial y primero se podrán confeccionar cartas que apunten a la cantidad de vértices, la cantidad de lados, si la figura tiene alguna línea curva o no, etc. Luego se podrá ir pensando en incluir otras propiedades para segundo y tercer grado como el paralelismo y la perpendicularidad. Posteriormente se podrán agregar al mazo otras cartas que tengan que ver con relaciones intrafigurales, por ejemplo, el número de diagonales, la forma en que se cortan, los ángulos de las figuras, etc.

Una variable a este problema puede ser confeccionar los dos mazos de cartas:

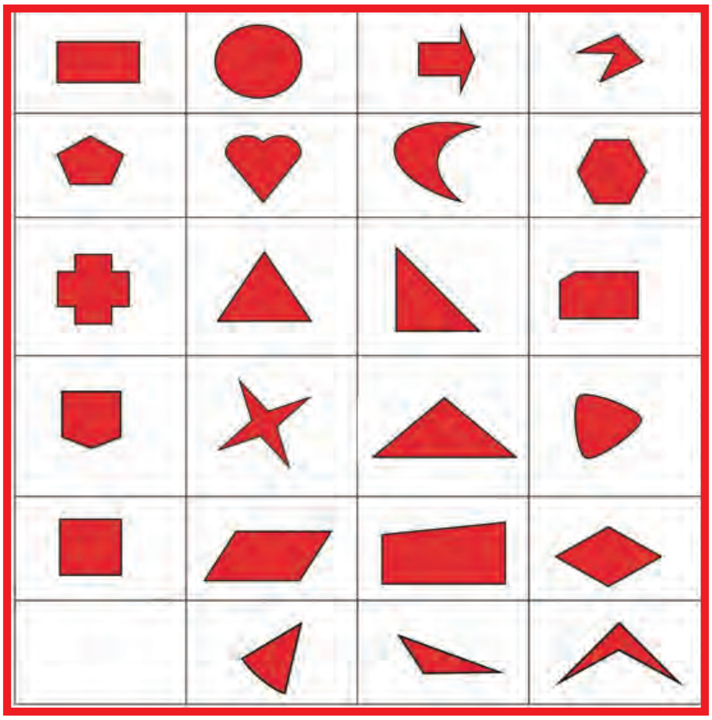
- El primero con figuras geométricas del espacio y
- el segundo con características (propiedades) correspondientes a esas figuras.

Las siguientes son las cartas de los dos mazos.

**Mazo 2 - de propiedades**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 lados | 3 lados | 5 lados | Todos lados iguales |
| Todos lados distintos | 2 lados iguales | 3 lados iguales | Más de 6 lados |
| Con huecos | 3 vértices | 4 vértices | 5 vértices |
| 1 vértice | 2 lados distintos | Con líneas curvas | 7 vértices |
| 6 vértices | 4 lados iguales | Cuadrilátero | Triángulo |
| Rectángulo | Cuadrado | Más de 3 lados | Con una línea curva |

**Mazo 1 - de figuras**



Hasta ahora: **¿qué se podría sistematizar?**

A partir de los problemas presentados para abordar la comparación y la identificación de figuras del plano y del espacio se podría sistematizar el trabajo con las figuras del plano atendiendo a la diferenciación de polígonos, a la clasificación de polígonos por el número de lados, número de vértices, diferenciar líneas curvas, rectas y mixtas, caracterizar las rectas paralelas y en particular lados paralelos. De igual modo, los problemas anteriores posibilitan establecer relaciones entre polígonos, la identificación de los ángulos interiores de los polígonos, el trabajo con ángulos rectos como caso particular, la caracterización de la circunferencia y el círculo como no polígonos.

En relación a las figuras del espacio, los problemas anteriores habilitan a la sistematización en relación a los siguientes contenidos: la diferenciación de poliedros, en particular prismas y pirámides, las caras, los vértices, las relaciones entre prismas y pirámides y en particular la posición relativa de planos que “funcionan” como bases o caras en prismas y pirámides.

## c. Describir figuras planas

### ¿Qué tipo de actividades son las de descripción de figuras?

Con el fin de seguir profundizando la organización del conocimiento geométrico a ser enseñado, este perfil pone en evidencia la necesidad de continuar el avance de las características de las figuras tanto del plano como del espacio. Como sabemos, los alumnos de este ciclo tiendan a validar empíricamente esas propiedades, reconocerlas, identificarlas y ahora describirlas para caracterizar las figuras. Son acciones necesarias que ayudan a la conceptualización de esas figuras. Este perfil centra las acciones sobre todo en la relación con la competencia comunicativa porque al “Describir figuras en función de…” habilita a escribir a través de un texto, a narrar lo hecho oralmente, a realizar un dibujo, a revisar esas ideas, a validarlas, a volver sobre ellas y modificarlas, así como también a agregar otras, etc.

A partir de las acciones anteriores el escribir en matemática comienza a cobrar sentido como una competencia sustantiva a la hora de la enseñanza y del aprendizaje en matemática.

La descripción de figuras exige la explicitación de las propiedades en el texto que se construya. Esta exigencia denota una diferencia relevante con las actividades de copia por las que ya se transitó en los perfiles ya explicitados. En las actividades de copia las propiedades, elementos, relaciones de las figuras se ponen en juego en acto, es decir que la actividad no exige su explicitación, alcanza con ponerlas en juego.

### ¿Qué tipo de problemas presentar?

Las clases de problemas que se presentan son de comunicación. Algunos problemas atienden a la escritura de mensajes, a la lectura o identificación de cierta descripción con algunas figuras dadas. Estos últimos pueden tender puentes por ejemplo con el problema del roba montón del perfil anterior como posibilitador de tener redactadas propiedades que se utilicen ahora para describir una figura.

Por otro lado, aparecen problemas que llamamos “yo ya sé…” que habilitan a describir lo que cada alumno sabe de las figuras en juego, tanto del plano como del espacio. Otro tipo de problema es preguntar directamente sobre algunas características de las figuras como por ejemplo, ¿cuántos ángulos rectos tiene esta figura?, ¿esta figura tiene lados paralelos? Esta forma de presentar el problema pone el foco directamente en alguna propiedad específica de la figura y habilita la reinversión de estas propiedades en otras situaciones.

## Problemas para describir figuras planas

### Problema 1

Escribir un mensaje para que el otro equipo pueda construir la figura que les tocó.

No se pueden hacer dibujos.

Grupo A Grupo B

Para llevar cabo esta actividad será necesario formar equipos de trabajo. Cada equipo tendrá una de las dos figuras: la A o la B, sin poder ver la otra. La idea es que cada equipo describa por escrito la figura para que el otro equipo la pueda reproducir. La condición exigida: “no se pueden hacer dibujos” funciona para que se confeccione un mensaje.

El grupo emisor de alumnos al describir la figura a través de un texto escrito condiciona a ir más allá de lo perceptivo y exige identificar propiedades, elementos y relaciones que la definen.

La validación de la actividad se puede dar de dos modos. Por un lado, si se quiere que a partir de la descripción se obtenga una figura igual a la de origen, entonces se podrá validar por superposición como en las actividades de copia del primer perfil.

Si la exigencia de la actividad es que se obtengan figuras del “mismo tipo” o “de la misma clase” no será necesaria la superposición sino habrá que revisar la figura inicial con el texto a fin de que se verifique cada una de las propiedades y relaciones explicitadas en él. Con esto se pretende hacer ver que podría reproducirse un rectángulo “más grande” o “más chico” que el del modelo pero seguiría siendo un rectángulo.

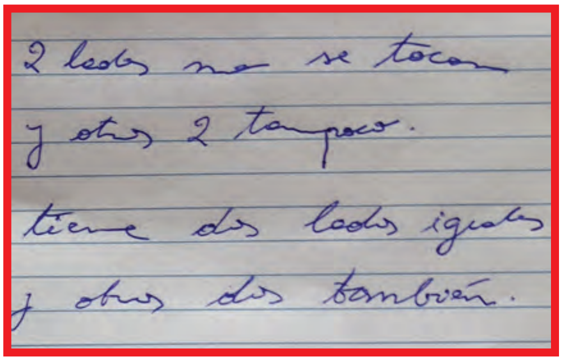
Es el maestro con base en su objetivo de enseñanza que decidirá habilitar una forma u otra de validación. Si se pretende producir uno igual al modelo deberá explicitarse en la consigna. En el caso presentado en la consigna del problema 1, no se exige que sean iguales a la reproducción de la figura por lo tanto se ha decidido que sean “del mismo tipo”, de la misma clase de figuras.

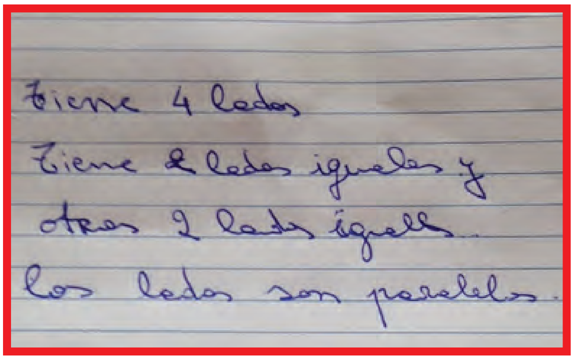
Una variable didáctica determinante es la que se da en relación a la elección de las figuras. Según las figuras que se presenten serán las propiedades que se pongan en juego y las relaciones que se puedan establecer. Es decir que el objetivo de enseñanza estará de acuerdo a ellas.

En este caso la actividad está pensada para tercer grado. Se seleccionaron el rectángulo y el paralelogramo con el fin de poder listar algunas propiedades que comparten y otras que los diferencian. Además, la idea es poner en juego propiedades ya estudiadas en segundo grado o reconstruirlas si fuese necesario. Será en la puesta en común donde se pongan los textos a discusión: ¿cuáles hay que mejorar?, ¿cuáles funcionaron?, ¿qué le falta a este?, etc.

Por otro lado, se ha elegido que las longitudes de los lados, tanto del rectángulo como del paralelogramo, sean similares, es decir que aunque vayan a medirlas para colocar esos datos en la descripción, no sean suficientes. Lo mismo con el color para que no se centre la descripción en cuestiones no geométricas.

A continuación se presentan algunos textos que se produjeron en las aulas:


2 lados no se tocan
y otros 2 tampoco.
tiene dos lados iguales
y otros dos también.


tiene 4 lados
Tiene 2 lados iguales y
otros 2 lados iguales.
Los lados son paralelos.

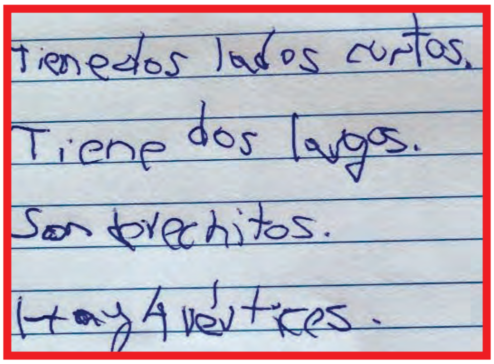
Los dos textos anteriores sirven para describir ambas figuras, es decir que con esos textos pueden representar tanto un rectángulo como un paralelogramo. En otros términos, los textos muestran que las propiedades que se están explicitando de maneras distintas son:

- 4 lados (2 y 2).
- Paralelismo de lados (en otros términos en la escritura aparece: no se tocan).
- Igualdad de lados.

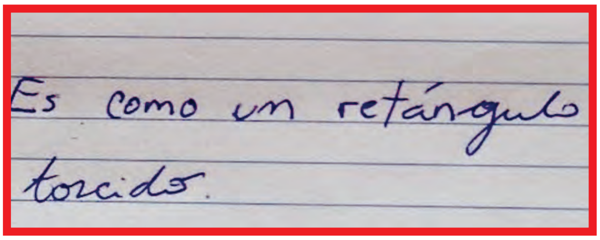
Estas descripciones no indican nada de los ángulos entonces con ellas no determina una de las dos figuras. Este grupo de alumnos se focalizó en propiedades comunes (ellos no tenían ambas figuras) por eso es decisivo qué figuras elegir con el fin de poner a discusión estas cuestiones. Son propiedades de ambas figuras pero no alcanzan para identificarlas totalmente, es decir, no las determinan con esa descripción. Por lo tanto cada texto anterior está incompleto.

Con esos dos textos podría el grupo receptor dibujar tanto un rectángulo como un paralelogramo no rectángulo. A veces suele suceder que frente a estos textos solo representan rectángulos a pesar de no haber escrito nada sobre la amplitud de los ángulos. Será el maestro que podrá presentar en el pizarrón, si ningún grupo receptor lo representó, al paralelogramo para discutir que ese texto habilita también a dibujar un paralelogramo no rectángulo (paralelogramo tipo).

También la puesta en común es un buen espacio para completar los textos al compararlos con otros. O bien, luego de la puesta en común, ofrecer nuevamente a cada equipo su texto para que se modifique y mejore.


Tienedos lados curtos.
Tiene dos largos.
Son drechitos.
Hay 4 vértices.

**Producción 1**


Es como un retángulo
torcido.

**Producción 2**

La producción 1 adjunta muestra además del número de vértices, las longitudes y la cantidad de lados, algo en relación a los ángulos: “los lados son derechitos” como sinónimo de que son perpendiculares.

Este texto de la producción 2 asocia a una figura conocida “el rectángulo” pero con otra característica distinta: “*rectángulo torcido*”, es decir ya perdió la característica de rectángulo. Será necesario poner a discusión de la clase: qué se entiende por rectángulo, a qué se le llama torcido, cómo se podría nombrar geométricamente, en qué se fijaron los productores de las pistas.

Los dos últimos textos centran el foco en los ángulos, cuestión que en los otros dos no aparecía. Otra posibilidad durante la puesta en común, si ningún texto de los producidos lo muestra, es habilitar a confeccionar unas pistas colectivamente que describan cada una de las dos figuras con el fin de asociar las características imprescindibles para determinar el rectángulo o el paralelogramo. De esta manera se tomarían elementos de varios textos y se conformaría uno posible.

Un cierre provisorio de esta actividad podría ser producir un texto y explicitar que: "Para describir una figura no solo alcanza con saber la cantidad de lados, vértices y longitudes de la figura. Mirar los ángulos es importante".

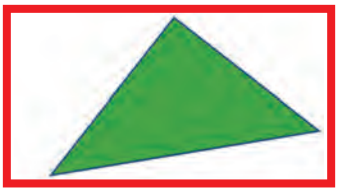
En segundo grado se podrían variar las figuras para centrarse en el paralelismo como contenido a abordar. Por ejemplo, mantener el rectángulo y agregar un trapecio. Ambos tienen lados paralelos pero el rectángulo tiende dos pares de lados paralelos y el trapecio solo un par. Los textos que se produzcan además de identificar el número de lados deberán diferenciar longitudes de los mismos, paralelismo y quizás podrían incorporar los ángulos.

Para primer grado se podría ofrecer un cuadrilátero y un triángulo con el fin de focalizar la descripción en el número de lados como contenido de este curso.

En nivel inicial la descripción se podría efectuar oralmente con el fin de tener disponibles las propiedades de las figuras que se elijan. La maestra podría confeccionar un papelógrafo, aunque los niños no lean, con el fin de evidenciar que si escribo luego puedo ir a él para identificar la figura que se quiere dar pistas. Si se hace colectivamente la consigna podría ser:

### Consigna para NI - Problema 1.1

Tenemos que enviar un mensaje al otro grupo para que ellos adivinen qué figura es.



Las figuras pueden presentarse recortadas o dibujadas, como ya se dijo al comienzo de este análisis.

Para el **trabajo con geometría del espacio** se podría presentar un problema similar al problema 1 variando las figuras elegidas, de acuerdo al grado y al recorrido del grupo, con el fin de organizar descripciones a partir de identificar propiedades de las figuras del espacio ofrecidas.

## Problemas para sistematizar “los yo ya sé…”

Este tipo de actividades de comunicación pretende poner el foco, al igual que las de escribir pistas, en lo que los alumnos saben sobre una figura determinada o un conjunto de ellas. Es necesario que expliciten las características de las figuras. La forma en que se comunique, los términos que se usen, las propiedades que aparecen y las que no, dan cuenta de lo que manejan los niños sobre las figuras en cuestión.

Este tipo de actividades sirve tanto para figuras del plano como del espacio, puede ser una figura compuesta por varias y analizar que no necesariamente mantiene las características de cada una de ellas, o sea que la nueva figura tiene características propias que podrá o no heredar las propiedades de las que la formaron. Por ejemplo, se podría pensar en un cuadrado y un triángulo equilátero exterior al cuadrado que comparten un lado.

**“Los yo ya sé…”** pueden funcionar tanto como disparadores del análisis de algunas figuras o como evaluaciones de lo que se ha aprendido sobre ellas.

### Problema 2

Escribir todo lo que sabes del rectángulo[12].

Esta actividad da la posibilidad de evidenciar cambios a nivel de ciclo y analizar un avance sobre las propiedades que los alumnos describen en su lista, es decir, lo que ellos saben de esa figura (el rectángulo en este caso).

En un tercer año podría aparecer en los “yo ya sé...”:

- “Tiene 4 lados y 4 vértices”.
- “Sus lados son rectos”.
- “Tiene lados iguales”.
- “Tiene 4 ángulos”.
- “Tiene ángulos rectos”.
- “Tiene lados perpendiculares”.
- “Tiene lados que no se cortan” [por paralelos].

A través del ejemplo anterior se quiere recoger lo que podría aparecer en algunos “yo ya sé…”, seguramente no todo lo listado aparezca en una misma producción. Será importante poner esos “yo ya sé…” a discusión para completar lo que se sabe entre todos y guardar esos acuerdos para otras actividades en las que los rectángulos aparezcan.

Obsérvese que se ha ejemplificado con distinto tipo de terminología. Esto significa que no se está esperando que aparezcan solamente los nombres de las relaciones geométricas como tal, sino que haya algunas aproximaciones a esas ideas. Un ejemplo de ello es “Tiene lados que no se cortan”. Seguramente los niños que produjeron esta característica se están fijando en los lados opuestos como paralelos. Sin embargo en su escritura no indican qué lados son los que no se cortan. La puesta en común será un buen momento para afinar y poner a discusión que hay otros lados a los que “no les pasa eso” y que por lo tanto es importante referirse a ellos para identificar qué lados cumplen esa propiedad.

Una lista más recortada que la de tercero puede aparecer para segundo grado según sean las experiencias a las que se han enfrentado los alumnos. Como en segundo grado el paralelismo es una cuestión a abordar sería deseable que en la lista de los “yo ya sé…” apareciera como característica del rectángulo a modo de engrosar lo que viene de primer año.

[12] Acá el rectángulo funciona como un ejemplo. Puede ser la figura o composición de figuras que el docente desee poner a estudio.

En NI5 años, se podrá mostrar la figura si no se conoce el nombre, con el fin de que puedan describirla. Es decir que el enunciado del problema 2 para este nivel podría ser:

**Problema 2.1**

¿Qué sabemos de esta figura?

Los niños podrían decir tiene:

- "4 puntas".
- "4 lados derechitos".
- "4 lados así" [colocando las manitos de manera perpendicular al identificar los lados consecutivos].
- "Su dibujo es este" [representando un rectángulo a mano alzada si se nombró y no se mostró].

Comparando los contenidos que presenta para cada grado el programa escolar y teniéndolos como objetivos de enseñanza, los "yo ya sé…" pueden funcionar para recoger empíricamente los avances por grado a nivel de ciclo con el fin de realizar acuerdos institucionales en el trabajo con las figuras geométricas.

## Problemas de SEA para describir figuras planas

A continuación se presenta una adaptación de la caracterización que se hace de dos ítems de la prueba en línea 2015. Estos problemas están ubicados para describir el perfil que se está desarrollando.

Según SEA, el aspecto del perfil "Describir figuras en función de sus características" esta ejemplificado mediante estos dos ítems que se focalizan en figuras de las que se solicita identificar la cantidad de ángulos rectos que presentan. En los dos ítems, la cuadrícula juega un papel esencial para justificar cuáles y cuántos ángulos en los cuadriláteros son rectos pero también ayuda al reconocimiento visual que los estudiantes pueden hacer de la figura. En ninguno de los ítems el ángulo recto está en su posición estereotipada (  ) lo que puede explicar en parte la baja tasa de respuesta correcta.

Sin duda la presentación en papel cuadriculado de ambos cuadriláteros no fue suficiente para reconocer el número de ángulos rectos de la figura con el fin de describir esa figura a través de esa característica. Es decir que aunque el soporte perceptivamente "pueda" ayudar no hay un reconocimiento de que ambos cuadriláteros tienen ángulos rectos.

Por este motivo, se ha presentado aquí para considerar la característica número de ángulos rectos como parte de una descripción de figuras. Los problemas 3 y 4 se pueden relacionar con el "Yo ya sé del rectángulo" en cuanto a los ángulos rectos para poder describir qué es un ángulo recto.

En general, la presentación del trabajo con ángulos, en la escuela primaria se hace, por un lado, vinculado a los ángulos interiores de los polígonos y, por otro, a la caracterización estereotipada de los mismos, sin establecer vinculación con los elementos que determinan a los ángulos. Hacemos referencia a que en general no se identifica que los lados son semirrectas y que todos los ángulos tienen dos lados y un vértice que es un punto, con el fin de manejar esa información para después poder describirlos. Se cree necesario identificar los elementos de los ángulos tanto cuando están vinculados a los polígonos como cuando "están sueltos" así como también es importante establecer relaciones entre la amplitud angular y algunas posiciones relativas de rectas. Nos referimos a la relación entre las rectas perpendiculares y los ángulos rectos.

**Problema 3** - Ángulos rectos 1


En este caso, el reconocimiento se ve favorecido por el hecho de que el cuadrilátero es un trapecio rectángulo donde los lados paralelos están incluidos en rectas de la cuadrícula y esto puede favorecer la identificación de los ángulos pedidos (Informe SEA, Describir figuras, noviembre 2015).

El análisis anterior da por supuesto que la descripción de una figura por sus ángulos ubicados sobre una cuadrícula da pistas de qué tipo de ángulos son y por lo tanto que se puede saber cuántos son.

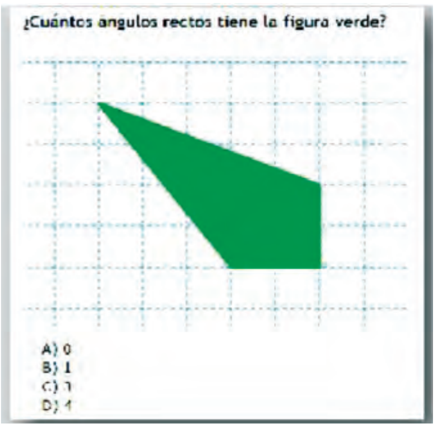
Proponer este problema pudiendo optar por no ofrecer las opciones puede ser una buena oportunidad para describir la figura según sus ángulos. Será necesario, por un lado identificar los vértices de esos ángulos rectos que además son vértices del trapecio. Por otro, la posición relativa de los lados consecutivos que se encuentran apoyados sobre la cuadrícula da cuenta de que los ángulos son rectos, es decir que están contenidos en rectas perpendiculares. Vincular la idea de lados perpendiculares y ángulos rectos es objetivo de salida de tercer grado.

La exigencia del problema de describir la figura por el número de ángulos rectos ayuda a identificarlos, a establecer relaciones más generales como: “Si hay ángulos rectos podremos encontrar rectas perpendiculares aunque no estén dibujadas”.

O bien “si tenemos dos lados perpendiculares entonces ahí hay ángulos rectos”.

El problema 4 abona a seguir profundizando las relaciones que queremos establecer al trabajar el problema 3. Aumenta su complejidad respecto al problema 3 pues solo dos de los cuatro lados están sobre la cuadrícula ortogonal.

**Problema 4** - Ángulos rectos 2



En este problema, se presenta un cuadrilátero sin lados paralelos. Se podría presentar en la clase sin las opciones sobre el número solución para abrir la discusión (Actividad extraída de la Evaluación en línea, noviembre 2015).

Quizás para algunos alumnos, a pesar de que el cuadrilátero esté representado sobre una cuadrícula, esta no habilite a que se identifique el ángulo recto.

Podría ser una buena oportunidad de modificar la consigna solicitando:

**Problema 4.1**

¿Cómo son los ángulos de este cuadrilátero?

Esta modificación puede ser una posibilidad para tender puentes con algunos contenidos del programa escolar. Por ejemplo, la clasificación justificada de la amplitud angular no solamente por percepción sino comparando con el ángulo recto de la cuadrícula, determinar los elementos de los ángulos y a su vez usar la clasificación de ángulos para describir el cuadrilátero.

Una modificación de este problema para segundo grado es poner el foco en los lados paralelos de los cuadriláteros, pues este contenido aparece por primera vez como responsabilidad en este curso.

Con el fin de trabajar en este perfil se podría modificar la consigna del problema 3 y 4 y cambiarla por:

¿Cómo son los lados de estos cuadriláteros?

En esta reformulación se estaría atendiendo no solo al paralelismo sino también a la longitud. El soporte de la cuadrícula habilita a fundamentar ambas características de los cuadriláteros describiendo así las posiciones relativas de los lados y también sus longitudes. Si se focaliza en "todas las posiciones relativas" se agrega la perpendicularidad en tercer grado y sobre las longitudes podemos considerarlo para comenzar el trabajo en primer grado.

Hasta ahora: **¿qué se podría sistematizar en estas descripciones?**

Poniendo el foco solo en los problemas 3 y 4 y sus reformulaciones podrían circular algunos de los conocimientos que siguen en términos de niños:

- "Tiene 2 ángulos rectos [problema 3] porque hay tres lados seguidos que están sobre la cuadrícula" o similar.
- "Tiene un ángulo recto porque solo tiene dos lados seguidos[13] sobre la cuadrícula".
- "Tienen lados perpendiculares" [problema 3 y 4 reformulados].
- "Tienen dos lados paralelos enfrentados" [problema 3 reformulado].
- "No tiene lados paralelos porque los de enfrente no están en la cuadrícula[14]".
- "Tiene dos lados seguidos iguales porque tienen la misma cantidad de cuadraditos".
- "Tienen dos lados pegados iguales porque tienen la misma cantidad de cuadraditos".

La familia de problemas que se presentó refiere a figuras del plano. Se podrían armar familias donde las descripciones estuviesen centradas en figuras del espacio y a su vez estableciendo relaciones entre algunas características de las

[13] Lados seguidos o pegados por consecutivos y enfrentados por opuestos, con la idea de que aún los niños no manejen estos términos y sea una posibilidad para presentarlos.
[14] Usamos para fundamentar el tipo de papel ofrecido. Obviamente puede haber lados paralelos que no se encuentren "sobre la cuadrícula".

figuras del espacio y las del plano como por ejemplo las caras, el número de caras, la longitud de las aristas y la longitud de los lados de las caras, la forma de las caras como polígonos o no polígonos, etc.

## d. Construcción de figuras planas y espaciales

### ¿Qué entendemos por construcción de figuras?

La idea de las construcciones a partir de un conjunto de datos no es mostrarlo en el pizarrón para que luego los niños "hagan lo mismo" en sus cuadernos. En ese caso la actividad cognitiva del alumno quedaría reducida a reproducir lo hecho y no poner en juego propiedades que las figuras cumplen y que junto con esos datos hace posible o no la construcción pedida. Los datos dados pueden ser ofrecidos o bien dibujados o en una lista.

Las actividades de construcción son una buena excusa para continuar profundizando las propiedades de las figuras, tanto del plano como del espacio, con el fin de tejer un entramado entre los distintos perfiles que se plantean en la sección sobre Geometría de este documento.

### ¿Qué problemas plantear?

En este perfil se hará referencia a los **clásicos** problemas de construcción y a otros **no tan** clásicos.

Dentro de **los problemas clásicos** se tendrán en juego las figuras y sus propiedades así como el tipo de instrumentos que se habilite, el tipo de papel, entre otros. Asimismo, otro tipo de actividad puede ser ofrecer un conjunto de datos para que se construya una figura bajo ciertas condiciones y reflexionar sobre si ese conjunto de datos hará posible o no su construcción. En el mismo sentido también será relevante discutir el número de soluciones a los problemas propuestos. Tener en cuenta estas cuestiones es muy potente a la hora de la puesta en común como una forma de trabajo matemático pudiendo concluir que: "no siempre las soluciones a los problemas existen y/o son únicas".

De igual modo se habilitará o no a que registren de alguna manera los pasos seguidos para desarrollar la construcción con el fin de discutir las propiedades que sustentan cada paso.

## Problemas para construir figuras del espacio

Dentro de **las construcciones no tan clásicas** se plantea la construcción de un esqueleto o de la cáscara de un cierto cuerpo o figura del espacio.

Se llama **esqueleto** a aquella representación que muestra de la figura del espacio las aristas y los vértices. Por ejemplo, cuando la actividad exige que se pida un conjunto de aristas (pajitas) y un conjunto de bolitas de plasticina (vértices) para armar un prisma recto de base triangular.

Cuando se habla de **cáscara** nos referimos a que el foco está puesto en las caras o en las superficies de esa figura del espacio. Por ejemplo, si queremos construir un cilindro qué figuras elegimos de las ofrecidas o qué figuras deberemos construir para que "nos quede un cilindro".

**Problema 1** - Esqueletos

Tienen que hacer un pedido para construir el esqueleto de esta figura.
Pueden venir a “mirar” algunas características de la figura hasta 2 veces.
Después yo les daré lo que piden en su lista y ustedes deberán armar el esqueleto del cuerpo.
Si no les queda, ustedes deberán modificar el pedido para poder obtener el esqueleto de la figura que se les pidió.

**Materiales:**

Pajitas de distintas longitudes, bolitas de plasticina, papel, lápiz, cuerpo elegido.

La consigna se podrá ofrecer oralmente y la organización de la clase puede ser en equipos de 3 o 4 alumnos agrupados de tal modo que posibilite generar debate en la escritura del pedido así como también en el armado del cuerpo.

De acuerdo al grado en que se implemente esta propuesta serán las condiciones de realización: número de posibilidades de revisar su pedido, el cuerpo ofrecido, si está o no en la mesa de trabajo de cada equipo o en el escritorio de la maestra y en este caso dependerá de habilitar el número de veces a “mirar” el cuerpo, etc. Esta implementación puede ser desde NI a tercer grado sin problemas.

## ¿Qué aporta la construcción de un esqueleto?

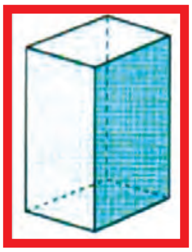
El exigir el pedido de elementos para la construcción de un esqueleto de un cuerpo pone el foco en las aristas y los vértices, elementos que pueden quedar desaparecidos en otro tipo de construcciones como, por ejemplo, en la cáscara o en los desarrollos, o en los dibujos a mano alzada de cuerpos.

Establecer cuáles son las características de ese cuerpo en función no solo del número de vértices y aristas sino también de la longitud de las mismas es indispensable para la construcción y para el entramado que se pretende construir sobre las propiedades de los cuerpos que se viene abonando con los perfiles que anteceden.

En un segundo año:

Si se presenta un prisma recto de base cuadrada como el de la figura sobre la mesa de la maestra y se solicita que hagan un pedido para construir su esqueleto podrían aparecer los siguientes pedidos:

**Pedido 1 -** Dame 4 pajitas largas y 8 cortas con 8 bolitas.



¿Qué saben los alumnos que hicieron este pedido?

Conocen la cantidad de vértices y aristas de esta figura del espacio pero aún no han identificado que no son suficiente estas propiedades para construir el esqueleto de un cuerpo como ese.

La intervención del maestro podría ser ofrecer correctamente la cantidad tanto de bolitas (funcionan como vértices) y de pajitas que solicitan cuidando de fijarse que si en su solicitud no identifican nada de la longitud de las pajitas podría ser una buena oportunidad para suministrarles pajitas de distintas longitudes de las largas: todas largas y distintas entre ellas o 2 a 2 y lo mismo con las 8 cortas. Como el pedido se valida por sí mismo, esos materiales no habilitan a formar el esqueleto requerido. En este caso el pedido es incompleto, se ofrece lo que solicitan pero no alcanza con decir solamente largas o cortas sino que será necesario explicitar cómo son entre sí las pajitas largas y cómo son entre sí las pajitas cortas. No es el maestro el que les dice que lo pedido está inacabado, no afinado aún en propiedades de la figura pero sí el maestro necesita estar atento a no facilitar entregas de "características" que los niños no pidieron.

Este grupo de niños seguramente necesitará "afinar" su pedido con el fin de poder construir su esqueleto. Este afinamiento tiene que ver con el explicitar las propiedades de la figura en cuestión poniendo el foco en número de vértices, número de aristas y longitudes de las mismas.

**Pedido 2 - Necesitamos 12 pajitas y 8 bolitas.**

Este grupo sin duda contó las cantidades de pajitas (como aristas) y lo mismo con los vértices pero no dice nada de las longitudes de las pajitas. Es así que una intervención similar a la anterior por parte del maestro será imprescindible para que este equipo mejore su pedido.

Poner a discusión en la puesta en común los distintos pedidos para mejorarlos, analizar cuáles funcionaron, qué les cambiaron, en qué se fijaron hace a la explicitación de las propiedades para la construcción de los esqueletos pedidos.

En este caso se podría sistematizar que: "Nos tenemos que fijar no solo en la cantidad de vértices y aristas sino también en cómo son de largas las aristas entre ellas."

**Problema 2** - Armado de cuerpos I

Construyan en esta hoja todas las caras[15] de esta figura.

¿En qué se fijaron para hacerlo?

Este problema atiende un aspecto distinto al problema 1 y pone el foco en las caras o superficies del cuerpo, cuántas son, de qué forma son, si hay caras iguales o son todas distintas, etc.

Si se ofrece un poliedro para construir sus caras podría ofrecerse una hoja centimetrada con el fin de analizar otras propiedades de las caras que venimos trabajando en los otros perfiles, como por ejemplo la longitud, el paralelismo y la perpendicularidad de algunas aristas. Podría construirse a mano alzada, con algún instrumento de geometría que se habilite o bien dejar libre esta condición. Estas variables serán decisión del docente dependiendo del grupo y de los conocimientos que este vaya construyendo.

[15] Hacemos abuso del lenguaje al llamar "caras" porque podríamos presentar también cono o cilindros que no tienen caras, como ya sabemos.

Si continuamos con el ejemplo del prisma recto de base cuadrada del problema 1 y si nos centramos en un tercer grado los alumnos al dibujar deberán atender a:

- El número de caras.
- La forma de cada cara: rectángulos y cuadrados.
- Si son o no iguales entre sí los rectángulos y los cuadrados.
- El paralelismo de los lados opuestos de cada cara.
- La perpendicularidad de lados consecutivos de cada cara.

Obviamente no se pretende que en un primer momento se fijen en todas estas propiedades. Si las construcciones no son completas se podrá intervenir preguntando, por ejemplo: ¿tiene caras iguales?, ¿cuáles son sus formas?, ¿cómo son?

En cuanto a la validación de esta actividad podría vincularse con los problemas de sellados y de reconocimiento de las huellas del perfil 1 como manera de anticipar cómo serán las caras que se deban dibujar y controlarlas posteriormente. No se hace referencia solamente al número de ellas sino al tipo y a la forma en particular, es decir, sus características geométricas (propiedades).

Una variable al problema 2 podría ser ofrecer figuras recortadas que podrían representar las caras de los poliedros y las superficies planas de los no poliedros y solicitarles a los alumnos que en equipos decidan qué caras tendrán que pedir para armar por ejemplo el prisma recto del problema 1.

**Problema 3** - Armando cuerpos II

En equipos tendrán que decidir qué caras pedir para armar esta figura. Luego deberán armar un pedido y con las piezas[16] pedidas armar el cuerpo.

Consideraciones similares que en los problemas anteriores se necesitarán tener en cuenta a la hora de la gestión de esta actividad.

La validación del pedido si es o no completo se obtendrá por el armado del cuerpo.

Según la complejidad de la figura que se ofrezca esta actividad se puede implementar desde NI a tercer grado. El pedido puede realizarse de manera oral o bien podría hacerse alguna otra representación como dibujos, si es que los niños aún no escriben palabras.

Una posible sistematización de las propiedades puestas en juego al construir la cáscara del prisma recto de base cuadrada podría ser para un segundo grado en palabras de niño:

- Necesitamos pedir 2 cuadrados iguales y 4 rectángulos iguales.
- El lado del cuadrado tiene que ser igual al ancho[17] del rectángulo.
- No los podemos “pegar” de cualquier manera.
- Todos los lados largos del rectángulo los tenemos que poner paralelos.

Es de esperar que la sistematización anterior se dé según sean los conocimientos que circulen en la clase de acuerdo a los pedidos hechos por los niños. Podría ser que solamente se sistematizara la cantidad y el tipo de caras pero no

[16] Las piezas pedidas no se pueden modificar. Es decir, no se pueden cortar o doblar. Hay que usarlas como son.
[17] Si el prisma fuese “bajito” podría ser el pedido: “el largo del rectángulo igual al lado del cuadrado”.

explicitando las longitudes de las aristas y ahí la intervención docente debería ser ofrecer lo que piden los alumnos pero con aristas de distintas longitudes (el ancho del rectángulo distinto al lado del cuadrado) con el fin de que no se pueda construir. De ese modo se pone el foco en la característica que aún no se han podido fijar los alumnos: la relación entre las longitudes de los lados de las caras que se convertirán en el cuerpo en aristas.

## Problemas de construcción de figuras planas "algo clásicas"

**Problema 4** - ¡Triángulos al ataque!

- Construir un triángulo sabiendo que uno de sus lados mide 4 cm y otro lado mide 7 cm.
- Construir otros dos triángulos distintos al anterior con lados uno de 4 cm y otro de 7 cm.
- ¿Todos construyeron los mismos tres triángulos?, ¿en qué se diferencian?, ¿en qué se parecen?

Este tipo de problemas de construcción exige organizar qué se sabe de los triángulos en relación a sus lados y qué triángulos con esos datos puedo construir.

Es de esperar que las construcciones que aparezcan reflejen triángulos de distinto tipo según los lados. Podrán aparecer escalenos e isósceles pero no equiláteros. Será una buena oportunidad para discutir por qué no es posible con esos datos construir triángulos equiláteros.

Algunos alumnos podrían poner el foco también en el ángulo que puedan formar el lado de 4 y el de 7 y según esta variación serán los distintos triángulos que se construyan. Lo mismo fijándose en la longitud del tercer lado.

Estas dos situaciones habilitan también a discutir si siempre es posible encontrar triángulos que tengan:

- un lado de 4,
- otro de 7 y
- ¿qué condición debería cumplir la longitud del tercer lado para que el triángulo exista?

Si esto no surgiera en la puesta en común el maestro podría decir: "En el otro tercero construyeron uno que tiene un lado de 4, otro de 7 y el tercer lado de 2 cm, ¿lo pueden construir?".

Hay en este problema varios aspectos a tomar en cuenta y que podrán discutirse gradualmente pero vinculándolos y no como aspectos separados.

En relación a la cantidad de triángulos: Son infinitos, es decir "puedo construir muchos" en términos de niño. Esto se podrá poner a discusión cuando se comparen los distintos triángulos bajo las condiciones exigidas.

En relación a la existencia: Si vamos por la longitud de los lados la discusión podría darse en términos de "tiene que cerrar" entonces "los lados tienen que cortarse" o bien "si pongo un lado y arriba el otro, el tercero tiene que ser más grande del pedacito que queda".

Estas ideas pretenden ejemplificar que no siempre existe un triángulo y que llegar a la conclusión canónica no es determinante pero sí cuidar que no siempre es posible con cualquier longitud de lados. La idea podría ser "hay que ver cómo son los lados", "no siempre se puede construir un triángulo con tres medidas cualesquiera."

Dependerá de las discusiones a partir de este tipo de problemas que se den en el aula si se arriba o no a la explicitación de la condición de existencia de triángulos.

Si vamos por los ángulos que forman los dos lados dados, el ángulo no puede ser de 180° ni de 0°, es decir, los segmentos no pueden quedar sobre una misma recta.

En este sentido se está poniendo a discusión que con dos lados no es único el triángulo que se puede construir. Es decir se necesitaría otro dato para que resulte un único triángulo y el dato que falta no es cualquier dato.

Flexibilizando como se planteó al principio de este perfil, la idea de construcciones "clásicas y no tanto" se podrá para NI proponer problemas donde los niños tengan que construir figuras a mano alzada de polígonos y no polígonos. Este perfil se podrá vincular con el primero donde se pedía que copiaran figuras. Se les podrá ofrecer un modelo o dictarles una serie de características para que ellos las vayan representando a modo de programa de construcción.

Vemos cómo reformular el Problema 4 para NI.

**Problema 4.1**

Dibujen en la hojita una figura que tenga "solo 3 lados derechitos o rectos[18]".

O bien: *Dibujen en la hojita una figura que tenga "solo tres puntas"*.

La idea es trabajar con el número de lados o el número de vértices para diferenciar los polígonos a través de esas características.

En primer año se podrá avanzar a partir de discutir si se ofrece como dato el número de lados o de vértices es lo mismo. En otros términos: "Si una figura[19] tiene 3 lados entonces tendrá tres vértices o puntas".

Recorriendo distintas construcciones a mano alzada y analizando que no importa si se da como datos tanto el número de lados como el número de vértices, estos siempre coinciden. Es decir "si una figura tiene 4 lados entonces tiene 4 vértices" y así poder comenzar una conjetura para establecer su generalización empírica a través de las construcciones. Aunque parezca natural esta relación si no se pone a discusión no tiene por qué construirse y es una caracterización importante de los polígonos.

En segundo año se podrá avanzar sobre el dictado de pistas para construir figuras agregando otras propiedades de las figuras en cuestión, por ejemplo:

Construyan en su cuaderno una figura que tenga solo:

- 4 vértices,
- 2 lados son paralelos y otros dos no.

Si en primer año se trabajó sobre la relación número de lados y de vértices, la primera pista arroja que tendrá solo 4 lados y agrega que no es cualquier cuadrilátero por la segunda condición. Acá el paralelismo de las rectas está en función de la caracterización para la construcción de un polígono, en este caso un trapecio. No es importante en este

[18] Volvemos a abusar del lenguaje para que los niños capten las características que nos interesa enseñar. Los polígonos tienen lados que son segmentos de recta. No nos interesa que manejen los términos segmentos de recta sino lo que implican en cuanto a su característica.
[19] Hacemos referencia a los polígonos.

momento ofrecer el nombre si no se necesita, es más potente conocer alguna de sus propiedades y poder representarlas, como es el paralelismo de dos de sus lados.

Hasta ahora: **¿qué se podría sistematizar?**

A lo largo del Primer Ciclo sería conveniente que los alumnos hayan pasado por experiencias de construcciones como las que se ejemplificaron más arriba. Las construcciones en sí mismas, como el resto de los problemas que se han presentado, no tienen sentido si no se discuten, si no se someten a validaciones y a sistematizaciones de los conocimientos puestos en juego luego de un cierto recorrido.

El fin de este estudio es que los alumnos conozcan las propiedades de las figuras tanto del plano como del espacio, así como también las vinculaciones entre las figuras del plano y del espacio. Estos son solo ejemplos y variarán según los materiales que se ofrezcan, el grupo y las condiciones bajo las cuales se realicen.

<table>
<tr><td rowspan="6">Variar:<ul><li>instrumentos</li><li>tipos de hoja</li><li>tipo de figuras</li><li>materiales</li><li>veces en “mirar la figura”</li></ul></td><th>Actividades de construcción</th></tr>
<tr><td>Esqueletos para figuras del espacio.</td></tr>
<tr><td>Cáscaras para figuras del espacio.</td></tr>
<tr><td>Reproducción de figuras (plano y espacio) a partir de un modelo presente: cercano o distante.</td></tr>
<tr><td>Construcción de figuras a partir de conjunto de datos. Por ejemplo:<br>- Triángulos conociendo: los tres lados, dos lados y el ángulo comprendido, tres ángulos, dos ángulos y un lado, jugar con colección de datos y número de soluciones.<br>- Cuadriláteros: cuadrado y rectángulo a mano alzada o usando escuadra graduada y compás. Trapecios.<br>- Rectas perpendiculares usando regla y escuadra.<br>- Rectas paralelas con: escuadra y regla o regla y semicírculo.<br>- Ángulos.<br>- Polígonos a partir de composición de otros (cuadrado y triángulo equilátero con un lado en común, etc.).<br>- Polígonos.<br>- Circunferencia y círculo a partir de conocer: centro y radio, un diámetro.</td></tr>
<tr><td>Construir figuras ofreciendo un programa de construcción (instructivo o algoritmo).</td></tr>
</table>

# Capítulo 5: Magnitudes y Medidas en el Primer Ciclo

## 5.1 Consideraciones curriculares

### a. El trabajo con magnitudes y medidas

Diferentes analistas coinciden en señalar que, trabajar en los primeros años de la escolaridad, los temas de medida utilizando mediciones realizadas con antelación no resulta productivo para la construcción de las nociones esenciales que involucra este "campo conceptual" (Vergnaud, 1990). En sintonía con estas observaciones, Chamorro (2003) sostiene que la "riqueza" de los saberes que deberían ponerse en juego a través del estudio de las magnitudes y de las medidas tiende a perderse, o cuando menos a "invisibilizarse", cuando la oferta escolar solo se limita a prácticas de enseñanza destinadas a:

> [...] entrenar a los alumnos en la resolución de ejercicios de los manuales escolares, enseñándoles lo que podríamos llamar procedimientos de algoritmización a realizar mecánicamente, y que, por su propia naturaleza, encierran una pérdida de sentido que tienen los cambios de unidades, pero eso sí, crean la ficción que el alumno aprende [...] (pág. 222).

También existe cierto acuerdo en señalar que una de las dificultades en el trabajo pedagógico dentro de este "campo conceptual" refiere a la fuerte interacción de los conocimientos matemáticos que involucra con la utilidad que los mismos tienen en términos socioculturales. En su cotidianidad los alumnos tienen la posibilidad de interactuar con distintas situaciones donde el uso de magnitudes y de medidas resulta fundamental, no obstante en la escuela se ven enfrentados a propuestas donde esos "saberes cotidianos" son escasamente razonados o problematizados desde lo didáctico. Al respecto, Chamorro (2003) manifiesta que:

> [...] a pesar de tratarse de un saber antiguo que siempre ha estado en el currículo, por lo que debería estar bien estudiado, no hay una relación clara entre las demandas sociales y culturales relativas a la medida, y la transposición didáctica que se hace de la misma en la enseñanza, en la que se evitan las prácticas efectivas de medición, lo que convierte a la enseñanza de la medida en un discurso teórico, que [...] versa fundamentalmente sobre cuestiones aritméticas más que de medida. [...] (pág. 223).

Por otra parte, el conjunto de nociones ligadas a la medida y la "complejidad"[20] que implica su abordaje conlleva de manera ineludible a reconsiderar cuáles son los "objetos matemáticos" involucrados, así como también a reflexionar sobre las formas más pertinentes de articularlos a fin de ser enseñados de acuerdo a las necesidades y particularidades de nuestros alumnos.

Cuando se efectúa un análisis de los fundamentos que sustentan los nuevos "contenidos de enseñanza" incluidos en la sección "Magnitudes y Medida" del PEIP del año 2008, se evidencia el acento que se da a las cuestiones mencionadas, muchas de las cuales fueron hasta este momento desatendidas en términos curriculares. Obsérvese:

[20] Puede dimensionarse cabalmente la complejidad en el tratamiento de la medida en función de los trabajos de Guy y de Nadine Brousseau (1991, 1992).

- La importancia de favorecer la construcción del concepto de magnitud a lo largo de todo el ciclo escolar, entendiendo "magnitud" como cualidad de los objetos factible de ser medida.
- La necesidad de trabajar sistemáticamente sobre la comprensión de los procedimientos de medición en toda su complejidad, insistiendo en el alto valor formativo que tiene "*la realización de múltiples prácticas efectivas de medida*".
- La relevancia de alentar actividades de enseñanza donde los alumnos deban realizar estimaciones de medidas, utilizando tanto unidades convencionales como no convencionales, así como "*la comunicación de los modelos de representación utilizados*". (Ver ANEP-CEP, 2013)

La importancia de considerar estos tres elementos está dada porque el tratamiento de la medida efectuado durante la escolarización básica termina condicionando las ideas que, sobre el concepto de magnitud, los alumnos alcanzan a construir. En este sentido, resulta clave, en principio, estimular prácticas de enseñanza orientadas fundamentalmente hacia el análisis de los "*objetos soporte de magnitud(es)*" (Xavier De Melo, 2005, pág. 196) y de lo que, en definitiva, la noción "*magnitud*" supone desde lo matemático (Chamorro, 2003, pág. 224). Esto es: "Si queremos enseñar el concepto de magnitud plantearemos actividades en las cuales el objetivo será la comprensión de aquello en lo que la magnitud consiste, independientemente de otras actividades en que se aborden la medida y la medición".

En cuanto a la medición, las investigaciones son contundentes al enfatizar que se "aprende a medir cuando efectivamente se mide". El hecho de no incluir en el aula los procedimientos involucrados en los actos de medir, donde quien realiza la medición precisa tomar un conjunto de decisiones –respecto a la magnitud a considerar del objeto soporte involucrado, respecto a la cantidad de magnitud que debe medirse y respecto al instrumento de medición más eficiente a utilizar de acuerdo a la situación planteada, entre otras muchas–, a veces bajo la idea de "economizar" tiempo pedagógico, conduce a derrochar toda la riqueza contenida en cada uno de los procesos mentales y conocimientos que se movilizan cuando los alumnos deben realizar una medición concreta.

Por otra parte, como insinúan Damisa y Pazos (2007), para que los trabajos enfocados en medición que se desarrollan en la *escuela* resulten potencialmente "significativos" desde lo conceptual, requieren ser traducidos en problemas auténticos que desafíen e interpelen los saberes de los escolares.[21]

Finalmente, los estudios también dan cuenta de los beneficios que el desarrollo de habilidades individuales de estimación ofrece en cuanto al entendimiento cabal de los procesos inherentes a la medición. En efecto, favorecer desde la enseñanza situaciones donde los alumnos necesiten obtener una medida sin usar instrumentos concretos, permite avanzar en el control del *orden de magnitud* de una medida, transformándose por ejemplo, en una herramienta de inestimable valor al momento de evaluar la pertinencia o razonabilidad del resultado obtenido –o, dado– luego de una medición.[22]

## b. Avances en el Primer Ciclo

Uno de los desafíos en el "tratamiento de la medida" radica en la elaboración de situaciones pensadas con la intención didáctica de construir sentido en torno a los conocimientos matemáticos involucrados en los actos de medición. Esto implica tanto enfrentar a los alumnos a diversas situaciones donde precisen efectivamente medir, como promover el análisis de lo que se pone en juego en cada *medición*. Esto es, reflexionar sobre cuál es la magnitud que se mide y cuál es la unidad de medida, y también sobre cuáles son las relaciones con otros *campos*, por ejemplo, frente a la necesidad de fraccionar la unidad de medida para una práctica de medición, cómo se expresa con números racionales.

[21] En otras palabras, "El concepto avanzará si los alumnos se ven enfrentados a los obstáculos que ofrece el procedimiento de medición, lo que se constituirá en un verdadero problema si el docente logra plantear situaciones en las que la medición sea necesaria y no se haga solo por imposición docente. Las prácticas efectivas de medición que se efectúen en diferentes espacios (micro, meso y macro) habilitarán el uso de distintos procedimientos, distintos materiales y diferentes unidades" (Damisa, Pazos, 2007, pág. 26).

[22] Recuérdese: "[…] la frecuentación de experiencias reales de medición desarrolla esa capacidad, proporcionando a los alumnos la incorporación de referentes para actividades posteriores" (de Mello, pág. 203).

De esta manera, para iniciar el proceso que debería conducir a la conceptualización de la idea de magnitud, el PEIP del año 2008 propone transitar desde el reconocimiento de "diferentes magnitudes de un objeto" y, puntualmente, de "las magnitudes medibles de los objetos" en NI3 años, hasta la identificación de algunas "magnitudes extensivas" (longitud, masa, superficie, capacidad) y la posibilidad de, por ejemplo, "sumar longitudes de sogas", ordenarlas, comprender que aunque "cambie la forma de la soga", esta sigue teniendo "la misma longitud", en Primer y Segundo año.

Asimismo, en este momento de la escolaridad se debería favorecer, junto con los procesos de medición, el análisis de las unidades de medida. Para ello, se entiende necesario avanzar en Inicial desde "*la comparación directa entre objetos*" a "*la comparación indirecta con unidades no convencionales*", añadiéndose para *primer* año *"la comparación con unidades convencionales"*. Se trata, en este sentido, de problematizar la noción de unidad de medida, concibiéndola como una cantidad arbitraria de cierta magnitud que permite establecer una relación con otra cantidad de esa misma magnitud.[23]

En función de ello, deberían presentarse situaciones donde los alumnos requieran tomar decisiones respecto a la pertinencia o adecuación de la unidad de medida a utilizar. También problemas que tiendan a la construcción de equivalencias, en tanto en cuanto expresiones de la misma cantidad de magnitud de acuerdo a diferentes unidades de medida. Estos problemas, deberían contribuir a reflexionar sobre las relaciones entre diferentes unidades, por ejemplo, la relación inversa que se establece entre unidad y medida, si la unidad de medida es "más chica", "entra más veces".

Finalmente, ocuparse del desarrollo de las habilidades de estimación de medidas con la construcción mental de variados referentes, como por ejemplo "qué longitud es un metro", o "qué capacidad corresponde a un litro".

## c. Contenidos programáticos y perfiles

En función de lo anterior, el siguiente cuadro resume los contenidos programáticos que fueron asociados a los perfiles de egreso en Magnitudes y Medidas.

| Año | Contenidos ligados a los perfiles |
|---|---|
| **Tres años** | Las diferentes magnitudes de un objeto.<br>Las magnitudes medibles de los objetos.<br>La **estimación sensorial** de la cantidad de magnitud de un objeto. |
| **Cuatro años** | La cantidad de magnitud.<br>La **comparación directa** entre objetos. |
| **Cinco años** | La conservación de cantidad de magnitud en los objetos.<br>Las distintas medidas para expresar una misma cantidad de magnitud.<br>La estimación mental a partir de la comparación indirecta con unidades no convencionales.<br>La **expresión de la medida como número**. |
| **Primer año** | Las relaciones de equivalencia utilizando una unidad de medida como patrón.<br>La **comparación con unidades convencionales**.<br>La **estimación tomando un referente**. |
| **Segundo año** | Las propiedades de la medida: transitividad, aditividad, conservación.<br>Las **unidades de medida**.<br>La expresión de la medida como intervalo.<br>La estimación con varios referentes. |

[23] Conviene recordar que, "[…] es importante 'pensar' la medida como una razón entre la cantidad a medir y la cantidad usada como unidad. Esta apreciación como razón nos permitirá más adelante vinculaciones con el conjunto de los números racionales […]" (Damisa, Pazos, pág. 24).

| | |
|---|---|
| **Tercer año** | Los sistemas regulares de medidas.<br>La **expresión de la medida**.<br>La estimación por composición y descomposición de cantidades de magnitud. |

Tal como se observa en el siguiente cuadro, los perfiles de egreso de tercer año derivan de la secuenciación planteada en el programa escolar.

| Conceptos y contenidos programáticos vinculados | Perfil de egreso de tercero |
|---|---|
| **Medida y unidades de medida.**<br>Magnitudes: longitud, capacidad, peso, volumen, amplitud angular. | Comparar y ordenar cantidades de magnitud (longitud, peso, capacidad) para resolver distintas situaciones, por comparación directa o utilizando una unidad convencional o no convencional y fracciones de la misma. |
| **Estimación.** Equivalencia. | Expresar la medida de una cantidad en distintas unidades. |
| | Estimar cantidades de magnitud. |

## 5.2. Familias de problemas

### a. Medición y estimación de cantidades

#### ¿Qué problemas presentar?

Para este eje de contenidos, se han planteado tres perfiles: la comparación y ordenamiento de cantidades, las mediciones efectivas con unidades convencionales y la estimación.

#### Sobre comparación y ordenamiento

Comparar es un proceso constitutivo en los actos de medir y la comparación se fomenta esencialmente mediante prácticas efectivas de medición. Esto no quiere decir que medir sea lo mismo que comparar, porque es factible realizar una comparación sin necesidad de que esta se transforme en una medida concreta, o viceversa (Xavier de Mello, 2005). Esto solo ocurre cuando hay que efectuar una medición y establecer el resultado con un número y una unidad. Allí hay que comparar y reflexionar respecto a la unidad de medida y al sistema del que forma parte.

La comparación puede ser "directa" y, en ese caso, se comparan cantidades de cierta magnitud que soportan dos objetos, por ejemplo, las longitudes de dos sogas. También puede ser "indirecta" o con intermediario, cuando se comparan las cantidades de magnitud con un tercer objeto –también soporte de la misma magnitud– que actúa como mediador entre los objetos iniciales que se quiere comparar y en definitiva, termina oficiando como unidad o como patrón de medida entre ambos.

Trabajar en el aula de manera sistemática con los instrumentos de medición, además de favorecer el reconocimiento de la utilidad social que estos tienen, posibilita a los niños construir el sentido de la información que suministran. Por ejemplo, en el caso de la balanza de dos brazos, si bien resulta un instrumento de medición casi obsoleto frente a las refinadas balanzas electrónicas actuales, desde el punto de vista didáctico, permite experimentar sobre la igualdad de pesos al igualar la altura de los platillos, condición importante para la construcción de la idea de medir. En cambio, las balanzas digitales ofrecen de forma automática un "número medida" no obstante ocultando el proceso de comparación.

## Sobre medición con unidades

Presentar situaciones de enseñanza donde sea necesario utilizar unidades de medida no convencionales debe ir mucho más allá de los años iniciales de la escolaridad, o como manifiesta Xavier de Mello (2005): "*no son una etapa a superar*". En tal sentido, el trabajo con patrones de medida arbitrarios tiende a facilitar el entendimiento de la noción de unidad. Mientras tanto, no debe olvidarse que:

> […] el trabajo con las unidades, al menos con aquellas cuyo tamaño lo permite, requiere de la manipulación para familiarizarse con el orden de magnitud, requisito previo para cualquier estimación en medida y única vía para acceder al descubrimiento y estructuración posterior de la relación entre los distintos órdenes de unidades (Chamorro, pág. 236).

## Sobre estimación

Varios autores señalan que las habilidades de estimación reclaman un trabajo didáctico planificado a tales efectos que fomente entre los alumnos la construcción de algunos criterios personales, siempre factibles de ser refinados, que tiendan a orientar sus estimaciones.

Practicar o realizar mediciones efectivas resulta clave en el desarrollo de los criterios de estimación. Generalmente, en estas actividades se les brinda a los alumnos la oportunidad de poner en juego los referentes mentales que, con respecto a ciertas cantidades de magnitud, particularmente han construido, lo cual conlleva a reflexionar sobre los mismos, sobre su pertinencia o su validez, sobre su adecuación, mejorando así las habilidades de estimación.

# Problemas para comparar y ordenar cantidades

Los siguientes problemas requieren comparar y ordenar cantidades de distintas magnitudes: peso, capacidad, longitud. Abordan procedimientos de comparación diferentes y se utilizan unidades no convencionales.

### Problema 1


¿CUÁL PESA MÁS?

MATERIALES

- UNA FRUTILLA, UNA MANZANA, UNA NARANJA Y UNA BANANA
- UNA BALANZA DE DOS PLATILLOS

REGLAS DE JUEGO

ANTES DE PESAR LAS FRUTAS, CADA JUGADOR ARRIESGARÁ CUÁL ES LA MÁS PESADA EN CADA CASO Y COMPLETARÁ LA PRIMERA TABLA.

LUEGO DE PESARLAS, COMPLETARÁN LA SEGUNDA TABLA.

GANA EL QUE MÁS COINCIDENCIAS TENGA.

¿CUÁL SERÁ LA MÁS PESADA?

LOBITO Y LAS MEDIDAS

40

Para los niveles iniciales de la escolaridad, sala de 5 y primer año, quizá sea conveniente desarrollar esta actividad en forma colectiva, no obstante si se plantea en segundo año y tercer año, sería interesante conformar grupos de trabajo para promover reflexiones respecto de lo que cada uno fue realizando u observando durante el desarrollo de la tarea.

Una vez colocados sobre una mesa todos los materiales a utilizar, frutas e instrumento de medición, será importante tomar unos minutos antes de comenzar directamente con la tarea para que los alumnos los observen, los exploren, los manipulen. También que el docente dialogue con los alumnos sobre la balanza de dos brazos para establecer entre todos cuál es su funcionamiento. Asimismo, convendrá que dialogue con ellos para asegurarse del sentido que los alumnos confieren a la idea de peso (masa) en tanto magnitud.

Se trata de que los alumnos realicen una práctica efectiva de medición en clase, mediante un procedimiento de "comparación directa" entre diferentes objetos, en este caso concreto, objetos del ambiente cercano al niño, como lo son las frutas.[24]

¿Qué podría ocurrir en la fase de exploración y trabajo autónomo de los niños?

Además de *"comparar y ordenar cantidades de magnitud"*, tal como se plantea en las reglas del juego se alienta a los niños a estimar claro está, no meramente a través de la observación –mirando a la distancia las frutas seleccionadas–, porque esto solo llevará a la apreciación de su "tamaño" (volumen), sino haciendo el ejercicio de sopesarlas. A partir de ello, será importante cuestionar a los alumnos: *¿cuál de todas estas frutas consideran ustedes que es la "más pesada"? ¿Por qué?* Para afirmar esto*, ¿qué características de las frutas han tenido en cuenta? ¿Sus formas? ¿Sus tamaños? ¿Cuál piensan ustedes que es la "menos pesada" de todas ellas? ¿Por qué?*

Durante este intercambio quedarán al descubierto los criterios personales de estimación que manejan los alumnos, lo que habilitará otras intervenciones didácticas tendientes a analizar y problematizar los referentes de estimación, a sabiendas de que las mismas están en proceso de construcción.

Se solicita que las distintas frutas seleccionadas tengan un tamaño similar para limitar una idea típica de estas edades respecto de que "*cuanto mayor es el tamaño de un objeto también mayor será su peso*".

Iniciado el trabajo autónomo de "comparación directa", será clave que a la interna de los grupos de trabajo se lleve un riguroso control de las relaciones "mayor que" / "menor que", para lograr, en definitiva, "*ordenar de mayor a menor de acuerdo a su masa*" todas las frutas presentadas. En este sentido, será de utilidad registrar los resultados de las comparaciones, utilizando, si se quiere, las tablas que se presentan.



[24] Recuérdese: "La medición real de objetos diversos tomados del entorno cotidiano es una actividad didáctica no solo conveniente, sino también posible [...]" (Chamorro, 2003, pág. 230).


¿Qué intercambios se podrán dar a la interna de los grupos de trabajo?

Los intercambios pueden ser orientados por el docente para que no se convierta en un mero accionar carente de todo fin. Precisamente, en un grupo de trabajo, justo antes de comenzar con el procedimiento de comparación, Juan, uno de sus integrantes, le dice a otro compañero: *"Dale, dale, solamente tenemos que pesar todas las frutas contra todas..."*. El docente podrá pasar por los grupos a fin de constatar que los niños están comparando las frutas de a pares para luego establecer relaciones entre ellos.

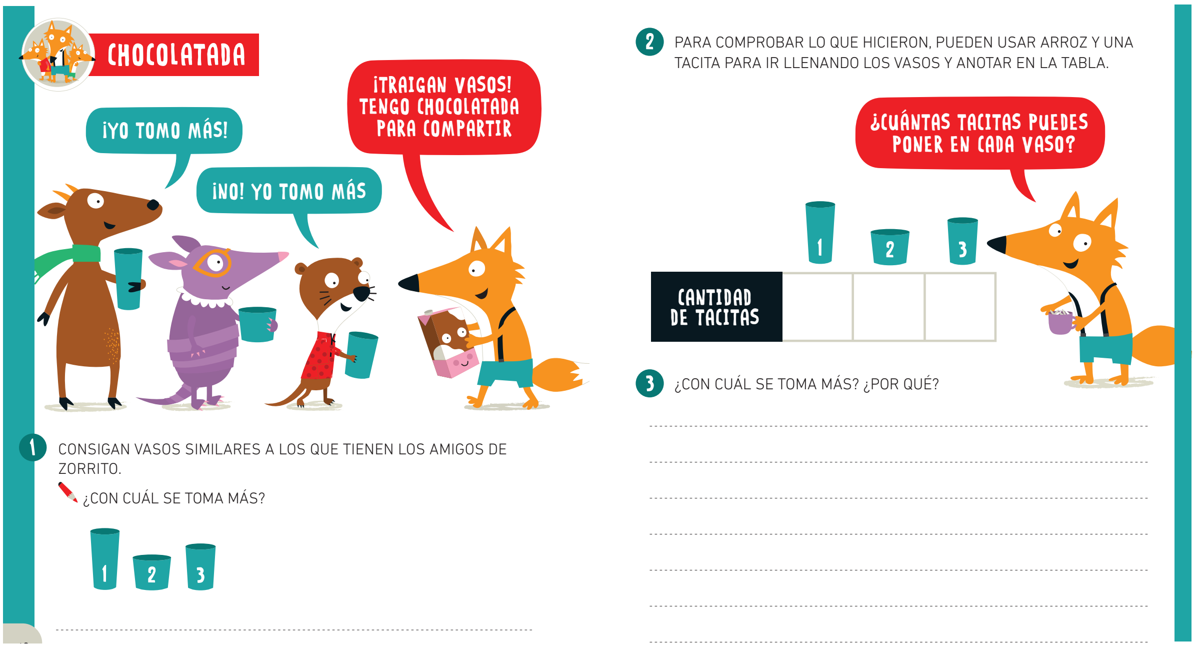
¿Y colectivamente?

Por otra parte, habrá que realizar un registro colectivo donde se anoten claramente los resultados obtenidos a medida que se avanza en el proceso de comparación.

Durante el intercambio colectivo, el docente podrá retomar preguntas y discusiones que haya escuchado en los grupos. Por ejemplo, podrá volver sobre lo que pensó el grupo de Juan y preguntar: *¿era necesario efectuar muchas o todas las "comparaciones" o solo bastaba con hacer algunas?* O también, si se observó que la manzana resultó "más pesada que" la banana, y luego que la manzana "pesó menos que" la naranja, *¿no estaríamos en condiciones de deducir que la banana es "menos pesada que" la naranja o, en su defecto, que la naranja "pesará más que" la banana?* Estos interrogantes, fomentan la reflexión en torno a los resultados obtenidos en los grupos.

Otro de los elementos a tramitar en colectivo es la confrontación entre las estimaciones realizadas de antemano, justificadas sobre la base de la manipulación de las frutas, con los resultados obtenidos mediante la utilización del instrumento. Al final, ¿se mantuvo ese ordenamiento inicial o tuvo alteraciones?, o cómo se plantea en el cuaderno para hacer matemática de los niños, ¿te quedarán iguales las dos tablas?

## Problema 2[25]




Nuevamente, sería interesante dar inicio a la actividad solicitando a los grupos que, recurriendo a estimaciones, traten de ordenar los distintos vasos que consiguieron. En contraste con la situación anterior, los recipientes seleccionados presentarán diferencias en cuanto a sus dimensiones, anchos y chatos, largos y finitos, es decir, de modo que no sea obvio al mirarlos cuál tiene mayor capacidad. La introducción de esta variable se vincula a la posibilidad de observar cómo afectan las estimaciones esas diferencias entre los vasos. Por ejemplo, se trata de advertir cuánto persiste la idea que el vaso "más alto", independientemente de su diámetro o de su forma, tendrá mayor capacidad que los demás. En el fondo, se intenta problematizar para seguir trabajando en otras instancias la cuestión de la conservación de la cantidad de magnitud.[26]

En sintonía con lo anterior, una vez que los alumnos efectuaron un ordenamiento a partir de sus estimaciones, será conveniente consultarlos acerca de los criterios que aplicaron a fin de ordenarlos de esa manera. ¿Por qué consideran que ese vaso es el que tiene mayor capacidad que el resto? ¿Qué tuvieron en cuenta? ¿Su forma? ¿Su altura?

¿Qué podría ocurrir en la fase de exploración y trabajo autónomo de los niños?

Para avanzar con la situación, se puede preguntar: *¿cómo saber cuáles son los vasos a descartar?, ¿con cuál se puede tomar más o tomar menos?*

Si se planteara el cuestionamiento sin otra indicación, cada grupo buscaría ordenar mediante procedimientos de comparación, algunos por comparación directa –comparando cada par de vasos–, y otros con algún "objeto intermediario" que podría ser un "instrumento graduado".

Más allá de que tanto la comparación directa como la indirecta pueden resultar adecuadas a los efectos de resolver la situación, si queremos avanzar en la idea de que para medir es mejor tener una unidad de medida se indicará que *usen las tacitas de café llenas de arroz para saber cuántas "contiene" aproximadamente cada uno de los vasos.*

---

[25] Una situación similar se incentiva a desarrollar en: Matemática 3. Núcleos de Aprendizajes Prioritarios. (Cf. Zilberman, Castro, Chara, 2006c, pág. 123).

[26] Cabe recordar que: "Trabajar el entorno relativo a la cantidad de magnitud supone trabajar la relación de equivalencia, es decir, la adquisición de criterios que permitan al alumno saber cuándo dos longitudes, dos superficies, dos masas o dos volúmenes son equivalentes en magnitud; [...]" (Chamorro, págs. 203, 225).

A medida que se realiza esta tarea conviene que cada equipo de trabajo anote los resultados obtenidos de cada medición en su tabla de 3 columnas, en una colocará un dibujo o letra identificatoria para cada tipo de vaso y en la otra la cantidad de tacitas que mide.

A continuación, se muestran diferentes formas de registrar la información que podrían utilizar los equipos y que se retomarán luego en el trabajo colectivo con los resultados de las mediciones que permitan contrastar con las estimaciones realizadas inicialmente así como resolver la situación planteada.

| Tipo de vaso | Registros de la *capacidad* del vaso en tacitas de café | | |
|---|---|---|---|
| | Gráfico | Literal | Simbólico |
|  |  | “Siete tacitas” | 7 |
|  |  | “Nueve tazas enteras de arroz” | 9 |
|  |  | “Lo llenamos con ocho tazas” | 8 |
|  |  | “Lleva seis tacitas llenas de arroz” | 6 |

¿Qué intercambios se podrán dar colectivamente?

Una vez concluidas las mediciones y los registros por grupo, será necesario reflexionar con los alumnos cuál es el rol que juega ese objeto intermediario, constituido en unidad, en la determinación de la medida de una magnitud. En este caso, el intermediario utilizado fue un objeto arbitrario de la vida cotidiana, una tacita de café, no obstante su introducción en el procedimiento de comparación resultó clave para realizar menos comparaciones que cuando se procede de a pares. La tacita, en calidad de unidad de medida, se transformó allí en un elemento en común, en una “*cantidad de referencia*” –como argumenta Bressan (1999)– que habilitó la producción de una “medida concreta”.

## Más problemas

Los siguientes problemas permiten volver a trabajar con procedimientos para comparar y ordenar diferentes cantidades, esta vez para longitudes.

### Problema 3

¿Quién es el “más alto” en esta mesita de trabajo? ¿Quiénes en la clase son “más altos”, o “más bajos”, que Joaquín? ¿Qué objetos de la clase o de la *vida cotidiana* tienen una “altura” similar a la de Joaquín? (Para nivel inicial)

### Problema 4

¿Cuál es la mayor de todas estas longitudes: el largo del escritorio de la maestra, el contorno de un aro de plástico o la altura de la biblioteca? (Para primer año)

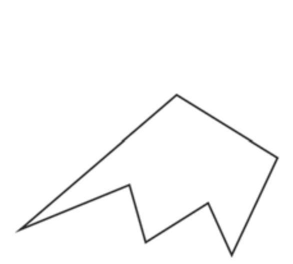
**Problema 5**

¿Cuál de las siguientes longitudes es menor que un "metro": el contorno de la ceibalita, la altura de la mesita de trabajo, el ancho de la puerta, el largo de la ventana del salón, el contorno de la base de la papelera? (Para segundo año)

**Problema 6**

¿En cuál de estas figuras la longitud del contorno es mayor?[27] (Para tercer año)

**Figura A** **Figura B**



## Problemas para expresar la medida de una cantidad en distintas unidades

Aunque entender el Sistema Métrico Decimal en tanto sistema, resulta extremadamente complejo durante los primeros años de la escolaridad, es posible avanzar en la conceptualización de la noción de unidad de medida en contextos de medición efectiva (Chamorro, 2003).

Entretanto, debe tenerse en cuenta que, cuando se cambia la unidad de medida utilizada, lo que se está cambiando es la medida que resulta. O, dicho con otros términos, "la medición de una misma cantidad de magnitud utilizando distintas unidades permite establecer distintas medidas para esa cantidad en función de la unidad usada". (Damisa, Pazos, 2007, pág. 19). Y estrechamente vinculados a estos aspectos asoma otra cuestión, el problema de la conservación de la cantidad de magnitud, asunto fundamental en cuanto al reconocimiento de relaciones de equivalencia en situaciones de medida.

La familia de problemas para este perfil, supone expresar la medida de una cantidad de determinada magnitud utilizando distintas unidades.

**Problema 1** - "¿Cuál es la capacidad del recipiente?"

Carolina hizo helado porque piensa invitar a sus amigas y lo puso en la heladera en un recipiente. Ella calculó que, al servirlo, podrá llenar seis vasos. Su amiga Bety le dijo: "no creo que te alcance, yo hice lo mismo el otro día y pude llenar solo cuatro vasos". ¿Cuántos vasos se pueden llenar con el contenido del recipiente?

Materiales: Cuatro recipientes de espumaplast iguales (como en los que se envasa comúnmente helado), cuatro vasos "chicos" iguales y cuatro vasos "grandes" iguales de espumaplast (la distinción entre vaso "chico"/vaso "grande"

[27] Se recomienda aquí la lectura de una secuencia de actividades que elaboraron Damisa y Pazos (2007), indicada especialmente para trabajar sobre el final de este ciclo, donde se abordan diferentes aspectos en torno a la longitud. Precisamente, la actividad inicial de esta secuencia mantiene similitudes con esta situación.

es únicamente a fin de tener en cuenta que la capacidad de los mismos debe ser sustantivamente diferente). Uno o dos baldes con arena.

Tarea: Determinar medidas distintas de una misma cantidad de magnitud (capacidad) usando unidades no convencionales.

Se conformarán grupos de trabajo, a los cuales se les entregará el mismo material: un recipiente de helado, un vaso “chico” y un vaso “grande”. Para uso común, se contará también con dos baldes con suficiente arena. Los grupos tendrán que establecer, procedimiento de comparación indirecta mediante, cuál es la capacidad aproximada del recipiente de helado, usando como patrones de medida cada uno de los dos vasos dados.

Esta situación insiste en la realización de una práctica efectiva de medición en el aula. También como en anteriores situaciones, se jerarquiza el abordaje desde “lo unidimensional”, es decir, pensando cuántas veces hay que repetir la unidad para obtener la cantidad que se quiere medir. [28]

¿Qué podría ocurrir en la fase de exploración y trabajo autónomo de los niños?

Para responder la pregunta del problema es necesario advertir que, según el vaso que se use, será la cantidad que se puede llenar. Se trata entonces de considerar: ¿cuántos vasos “grandes” llenos de arena “contiene” el recipiente?, y ¿cuántos vasos “chicos” pueden “rellenarlo”?

Lo central es que los grupos comparen las dos medidas que obtengan y puedan reconocer que la capacidad del recipiente de helado es factible de ser expresada, en este caso, con dos medidas distintas. Ya hemos planteado que, poder experimentar la medición efectiva en lugar de leer sobre mediciones hechas por otros, favorece la construcción de criterios de equivalencia a la vez que incide positivamente respecto al entendimiento de la idea de “conservación de la cantidad de magnitud”.

El registro de los resultados que va obteniendo cada grupo será clave a los efectos del análisis posterior. Por lo tanto, sin jerarquizar tal o cual tipo de registro, se deberá proporcionar a los alumnos alguna tabla para que lo hagan. En la siguiente, se muestran algunas anotaciones que se efectúan con frecuencia.

| Recipiente | Registros de la *capacidad* del recipiente según tipo de vaso | | |
|---|---|---|---|
| | Gráfico | Literal | Simbólico |
|  | ▮▮▮▮▮▮▮▮ | “Ocho vasos grandes con arena” | 8 |
| | ▮▮▮▮▮▮▮▮▮<br>▮▮▮▮▮ | “Catorce vasos chicos llenos de arena” | 14 |

¿Qué intercambios se podrán dar colectivamente?

Para la reflexión en colectivo un asunto relevante es discutir la relación entre la medida que resulta y los patrones de medida que se van utilizando. Esto es, ¿qué sucede con la medida de una cantidad de magnitud si varía la unidad de medida utilizada? Se podrá preguntar: *¿Cómo varía la medida de la capacidad del recipiente de helado en función de*

[28] En términos más formales decimos que “[...] la aplicación medida μ, que hace corresponder a una cantidad de magnitud un número real positivo, es una medida producto de tipo directo, ello significa que a efectos de medida, una longitud se compara con una longitud patrón, una superficie con una superficie patrón, una masa con una masa patrón, etc., obteniéndose la medida mediante un proceso aditivo que incluye el conteo del número de veces que se ha utilizado el patrón con el que hemos comparado” (Chamorro, 2003, pág. 246).

*los vasos usados como unidad? Y si en lugar del vaso "grande" usáramos una tapita de una botella de refresco como unidad de medida, ¿qué pasará con la medida de la capacidad del recipiente de helado?*

Para que las discusiones contribuyan a razonar colectivamente sobre la conservación de la cantidad de magnitud, se podrá preguntar: Está claro que al medir con distintas unidades la capacidad del recipiente su medida cambia. No obstante, ¿esta cantidad de magnitud se modificó en algún momento? Obviamente no, la cantidad de magnitud es la misma.

**Problema 2** - "El contorno de la mesita"

Para su mejor mantenimiento se ha pensado en bordear las mesitas de trabajo con una tira de goma autoadhesiva. Elijan una tira y determinen aproximadamente cuánta tira de goma es preciso comprar para cada mesita.

Materiales: Varios juegos de tiras de papel, dos por grupo, una "corta" (de 25 cm, ¼ metro) y otra "larga" (de 50 cm, ½ metro), es decir que una tira es el doble de largo que la otra.

Tarea: Determinar medidas distintas de una misma cantidad de magnitud (longitud) usando unidades no convencionales.

Se conformarán grupos de trabajo, a cada uno se le dan las dos tiras de papel de diferente longitud. Los grupos deberán elegir una de las tiras como unidad y "medir el contorno" de la mesita de trabajo. Se trata de que cada grupo según su elección, en el marco de una práctica de medición efectiva, establezca una medida del contorno y el maestro cuidará que algunos grupos midan con la tira corta y otros con la larga. Obtendrán así dos medidas para una misma cantidad de magnitud, pero a diferencia del problema 1, aquí habrá una relación conocida entre las unidades dadas, lo cual demandará reflexionar en profundidad respecto de las "medidas" obtenidas.

¿Qué podría ocurrir en la fase de exploración y trabajo autónomo de los niños?

¿Cuántas tiras "largas" mide, aproximadamente, el contorno de su mesita? ¿Y cuánto mide si utilizan las tiras "cortas"? Para concretar esta tarea, habrá que usar el procedimiento de transportar la unidad sobre el contorno de la mesita tantas veces como sea necesario para establecer una medida concreta. Es decir, es un procedimiento de iteración, de repetición de un proceso donde los resultados de una iteración se utilizan como punto de partida para la siguiente iteración. Esto requiere, como manifiesta Chamorro (1995), respetar "el paralelismo con el objeto y sin dejar huecos", tomar de referencia un *"origen"* desde el cual comenzar a iterar, así como contar cuántas veces fue iterado el intermediario en uso.

En tanto variable didáctica, se consideró que los patrones de medida fueran de un material flexible, para favorecer la iteración, sin tener que proceder de manera forzada a su fraccionamiento y pudiendo doblar las tiras enteras de acuerdo a la "forma" del contorno de la mesita.

Asimismo, como se mencionó, lo que se pretende es una "medida aproximada", lo cual habilita a los alumnos a desestimar, o más precisamente, orienta la decisión respecto a cómo actuar frente a ese "faltante", o ese "sobrante", que seguramente se generará cuando se realice la última de las iteraciones del proceso efectivo de medición.

Es importante que cada equipo anote el resultado de su medición para luego trabajar a nivel colectivo en un cuadro de datos sencillo donde se introduzcan las medidas que cada uno de los grupos obtuvo. Por ejemplo:

| Equipos de trabajo | Registros de la "*medida del contorno de la mesita*" expresada en... | |
|---|---|---|
| | Tiras "cortas" | Tiras "largas" |
| Equipos 1 y 2 | 14 | 7 |
| Equipos 3 y 4 | 12 | 6 |
| Equipos 5 y 6 | 13 | 7 |
| Equipos 7 y 8 | 11 | 6 |

¿Qué intercambios se podrán dar a la interna de los grupos de trabajo?

Dentro de las cuestiones a recuperar del trabajo interno de los grupos, está que, más allá de las dificultades para concretar el procedimiento de iteración, las medidas resultan diferentes pues en toda medición hay error.

Como no es sencillo manipular la tira de papel, transportarla de un lado a otro cuidando que uno de sus extremos coincida con la última referencia usada, tomar la decisión sobre qué hacer en la última iteración si la tira no "termina justo", si considerar un "sobrante" que no debe incluirse en el conteo, o como un "faltante" que corresponde incluirlo en el conteo final. Estas dificultades sin duda conllevarán a rectificar la medición efectuada más de una vez.

¿Y colectivamente?

Luego de llevar los datos de los grupos a la tabla, se podrá reflexionar con los niños sobre lo ilusorio de la medida exacta. Discutir con ellos, por ejemplo, las diferencias entre los resultados obtenidos con el uso de la tira "chica" contribuirá a entender que las mismas no remiten tan solo a errores de momento, causados por impericia de los integrantes del grupo, sino que estas variaciones son inherentes al acto mismo de medir. Y también se puede introducir la idea de que es necesario acordar colectivamente un intervalo de confianza para delimitar los márgenes del error admisible. Por ejemplo, "entre once y doce tiras largas".

Entonces, a la pregunta ¿cuánto "mide la longitud del contorno" de la mesita de trabajo?, es posible responder con dos medidas distintas: se podrá expresar que "la longitud del contorno mide" entre 11-14 si se considera la tira "chica" el patrón de medida, o entre 7-6 si la tira "grande" oficia en tanto unidad. Asimismo se podrá arribar a la conclusión de que cuando aumenta "el tamaño de la unidad" decrece "el valor de la medida" (Bressan, 1999).

Todas estas consideraciones permiten plantear al grupo otra pregunta: *¿Cuál es la relación entre las "longitudes" de la tira larga y la tira corta?*

Si se acuerda en la clase que la medida más probable del contorno de la mesita se puede expresar como 12 tiras cortas o 6 tiras largas, la relación entre las dos unidades es "una tira larga es igual a dos tiras cortas", o una es el doble o la mitad de la otra.

Pensar las relaciones entre distintas unidades de medida en situaciones como la presentada, saliendo de los tradicionales ejercicios de *conversiones* en el Sistema Métrico Decimal, resulta clave a fin de reforzar la idea de que con ellas se trata de "conservar la cantidad [de magnitud] expresándola en forma diferente [...]" (Bressan, 1999, pág. 16).

## Más problemas

Los siguientes problemas permiten volver a expresar medidas con diferentes unidades.

### Problema 1

¿Cuántos pasos de Martina “mide el largo del salón”? ¿Y cuánto si se lo mide con los pasos de la maestra? ¿Por qué cambian estas medidas? (Para nivel inicial)

### Problema 2

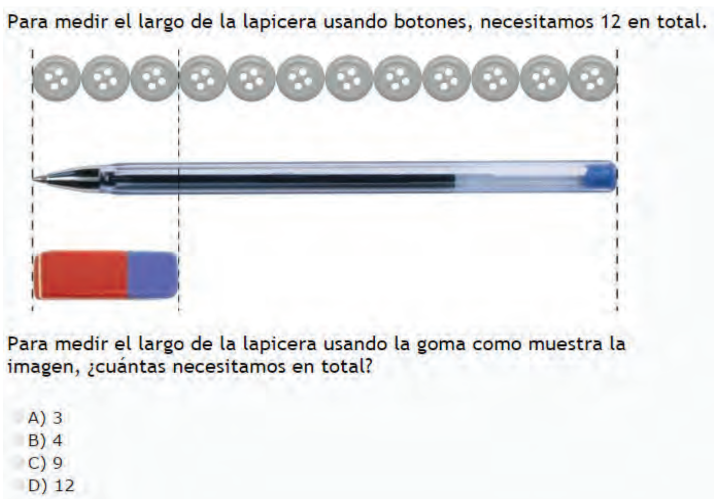
¿Cuántas jarras llenas de agua “contiene” un balde? ¿Cuántos vasos iguales se llenan con el contenido de esa jarra? ¿Cuántos vasos de esos “contiene” el balde lleno de agua? (Para primer año)

### Problema 3

“En grupos de dos, construyan con estas bandas de cartulina que les doy (sin graduación alguna) un metro idéntico al que tengo (que sí está graduado en cm y dm). Tendrán dos metros de modelo: uno pegado en el pizarrón y el otro en mi escritorio. No pueden llevarse estos metros (ni traer las bandas), pero pueden extraer de ellos todas las informaciones que consideren necesarias. Una vez terminado de construir su metro, deben llevarlo y compararlo con los patrones para ver si lo han hecho bien” (Bressan, 1999, pág. 21). (Para segundo año)

### Problema 4

Se sugiere resolver la actividad de *Evaluación en Línea* denominada “Lapicera y botones”.




*Actividad extraída de la Evaluación en línea*

### Problema 5

La mamá de Juan irá a la ferretería a comprar la goma autoadhesiva para el contorno de la mesita (del problema 2), entonces ¿cuántos metros le debe decir al ferretero que necesita?

Con la inclusión de esta situación se trata de fomentar el trabajo con las unidades convencionales. Para ello será necesario:

a. Discutir cómo se construye un instrumento graduado en el que se marquen distintas unidades para facilitar la medición cuando se requiere una mayor precisión en la medida. Por ejemplo, en lugar de decir entre 11 y 12 tiras, poder decir 11 tiras y 5 tiritas que sean de la mitad del largo de la tira chica.

b. Llevar al aula y comparar diversos instrumentos graduados que permitan medir diferentes cantidades de las distintas magnitudes, en este caso, longitudes. Se conversará sobre el metro y el centímetro como unidades de uso corriente en diversas situaciones, dialogando con los niños sobre el uso del metro de carpintero, la regla, el metro de modista, etc.

## Problemas para estimar cantidades

Como hemos planteado, la posibilidad de estimar depende de la construcción de ciertos referentes que, factibles de ser reforzados, refinados y/o rectificados de manera continua, actuarán como orientadores de las estimaciones. Cabe aclarar que: "Los referentes son objetos usuales (tazas, baldosas, goteros, cuadras, etc.) o partes de nuestro cuerpo (dedos, brazos, palmas, pies, etc.) con los cuales es posible establecer una correspondencia con las unidades convencionales (metro, ¼ kilo, 25 cm, etc.)" (Bressan, pág. 13).

### ¿Qué problemas presentar?

Como vimos en los problemas de mediciones efectivas presentados, realizar mediciones efectivas resulta clave en el desarrollo de los mencionados referentes de estimación.[29] Entretanto, de los estudios de Bright (1976) se deriva que es posible proponer situaciones en las que se da una unidad con la intención de estimar la medida de un objeto, y otras situaciones en las que se da una medida para estimar a qué objeto podría corresponder.

En ambos casos, si bien es posible proponer problemas con la presencia/ausencia tanto del objeto como de la unidad, en el Primer Ciclo convendrá trabajar con ambos presentes.

A continuación se desarrolla, en forma de juego, una "situación de estimación" que se caracteriza por tener definida cierta medida ("unidad presente") buscándose un objeto concreto que sea portador de esa cantidad de magnitud ("objeto presente", puerta del salón o pizarrón).

[29] "Los referentes son objetos usuales (tazas, baldosas, goteros, cuadras, etc.) o partes de nuestro cuerpo (dedos, brazos, palmas, pies, etc.) con los cuales es posible establecer una correspondencia con las unidades convencionales (metro, ¼ kilo, 25 cm, etc.)" (Bressan, 1999, pág. 13).

## Problema 1

### EL LARGO DE...

**MATERIALES**

- UNA HOJA Y UN LÁPIZ PARA CADA NIÑO
- UNA TIRA DE UN METRO PARA CADA GRUPO
- TARJETAS COMO LAS DE LA PÁGINA 47

**REGLAS DE JUEGO**

ENTRE 2 Y 4 JUGADORES.

SE REPARTE UNA TIRA EN CADA GRUPO.

SE COLOCA EN EL CENTRO DE LA MESA LA PILA DE TARJETAS BOCA ABAJO.

UN PARTICIPANTE POR VEZ SACA UNA TARJETA DE LA PILA Y LA LEE EN VOZ ALTA.

TODOS DEBERÁN ESCRIBIR, CADA UNO EN SU HOJA, DOS OBJETOS DE LA CLASE QUE TENGAN UNA DIMENSIÓN DEL MISMO LARGO QUE DICE LA TARJETA.

EL PRIMERO QUE REGISTRE LOS DOS OBJETOS DICE "BASTA" Y NADIE MÁS PODRÁ SEGUIR ESCRIBIENDO.

CADA PARTICIPANTE OBTIENE UN PUNTO POR CADA OBJETO ESCRITO EN EL QUE HAYA ACUERDO ENTRE TODOS.

SI APARECEN DUDAS SE MEDIRÁ EFECTIVAMENTE EL OBJETO CON LA TIRA.

GANA QUIEN OBTIENE MÁS PUNTOS LUEGO DE CUATRO VUELTAS.

MEDIDAS

Este juego se apoya en referentes cotidianos de los niños, algunos de ellos ligados a sus medidas corporales como fueron las primeras unidades de medida que eligió la humanidad. Por ejemplo: 15 cm si para sus manos la distancia entre pulgar y meñique con la mano abierta es de esa longitud, 2 metros si la puerta del salón de clases es de esa altura, 1 metro si la altura de los niños del grupo es superior a esa medida (en general, entre segundo y tercer grado está entre 1.00 y 1.30), 20 centímetros si la regla que forma parte de los útiles es de esa longitud.

El maestro elegirá tres o cuatro referentes para organizar el juego.

Inicialmente se puede jugar una partida modelo para asegurarse de que todos entienden las reglas y la maestra es quien saca la tarjeta y quien dice "basta". El juego se puede ir variando a medida que se van eligiendo los referentes para las tarjetas, cuestión que debe ser realizada entre todos antes de jugar, efectuando las mediciones correspondientes.

## Más problemas

Se sugiere además utilizar como insumos de trabajo desde la enseñanza las actividades de *Evaluación en Línea* denominadas "Peso de las personas" y "Vuelta ciclista".

Es importante contemplar que la posibilidad de responder en estos problemas tendrá que ver con investigar sobre los rangos de medidas para las magnitudes que intervienen en los problemas. En estos casos sobre los pesos de las personas a diferentes edades y sobre las longitudes entre ciudades. Asimismo, tener en cuenta que antes de proponer actividades como estas habría que proponer algún conjunto de problemas para medir con unidades convencionales.

¿Cuál de las siguientes personas tiene un peso aproximado de 6 kilos?



La etapa entre Aiguá y Treinta y Tres es de 127 km.
¿Cuántos km tiene aproximadamente la etapa entre Tacuarembó y Durazno?

*Actividad extraída de la Evaluación en línea*

# Capítulo 6: Probabilidad en el Primer Ciclo

## 6.1 Consideraciones curriculares

### a. El trabajo con probabilidad en el Primer Ciclo

Existe un acuerdo generalizado en la comunidad educativa de docentes y didactas de la Matemática relativo a la inclusión de la probabilidad en el programa escolar y la importancia de su enseñanza desde los primeros años de la escolaridad. Por un lado, la probabilidad es parte relevante de la Matemática ya que introduce otra forma de pensamiento (no determinístico). Por otro lado, es un elemento de nuestra cultura que se constituye en un saber básico para la toma de decisiones de los ciudadanos de nuestra sociedad actual.

En ese sentido, el Programa de Educación Inicial y Primaria (2008) vigente amplía y justifica la inclusión de la probabilidad desde diferentes perspectivas:

- **social**, porque existen numerosas situaciones del entorno del niño que revisten un carácter aleatorio (juegos infantiles, juegos de apuestas en su entorno familiar, predicciones meteorológicas);
- **formativa**, al considerar que el pensamiento lógico-matemático no puede basarse solamente en las disciplinas con una visión determinista, sino también en modelizar un funcionamiento de lo incierto, de lo plausible, lo probable, apuntando a un pensamiento probabilístico;
- **epistemológica**, a través de la introducción previa del pensamiento combinatorio para determinar correctamente los sucesos de cualquier experimento aleatorio sobrepasando los límites de la obviedad, además del tratamiento posterior de datos desde la estadística y de los conceptos vinculados al mismo. (pág. 66, negritas en el original).

E. Fischbein, autor de referencia que realizó varios aportes de valor para la enseñanza de la probabilidad, advierte la existencia de una "intuición parcial del azar en el niño, niño, que se va desarrollando poco a poco. Pero es necesaria la enseñanza, pues de otro modo, es posible que una persona llegue a las operaciones formales con una pobre percepción del azar." E inmediatamente agrega que el niño "[...] buscará dependencias causales que reduzcan lo incierto, incluso en situaciones donde no existen tales dependencias, por ejemplo 'la mala suerte'. Estará influenciado por las tradiciones culturales y educativas de la sociedad moderna, que orientan el pensamiento hacia explicaciones deterministas" (Batanero, C., 2013, pág. 7).

Nuevamente el Programa Escolar nos da pistas al respecto, apoyado en otros investigadores y voces de autoridad sobre la enseñanza de la probabilidad como Juan Godino, Carmen Batanero y Jesús Cañizares (1996) señalando que "[…] el niño tiene un razonamiento intuitivo correcto en situaciones aleatorias sencillas […]" (Godino, J., Batanero, C. y Cañizares, M. J., 1987, pág. 65).

Estos autores dejan de relieve la presencia de cierta intuición o "razonamiento intuitivo" como idea esencial para el aprendizaje de la probabilidad desde los primeros años de la escolaridad. Por ello es imprescindible, como señala Fischbein, desplegar prácticas de enseñanza intencionales pues su aprendizaje no se realiza de manera espontánea.

A partir de estos aportes, consideramos que la enseñanza de la probabilidad en la escuela primaria implica el trabajo con una familia de problemas que permitan a los alumnos construir el sentido de algunas nociones relativas al azar. El Primer Ciclo es un espacio fecundo para realizar un primer acercamiento y poner en contacto de forma intencional a los alumnos con la idea de lo aleatorio y de lo incierto. Esta idea es punto de apoyo para avanzar en el siguiente ciclo y, especialmente en educación media, hacia la formalización progresiva de la probabilidad y el estudio de sus propiedades. En ese sentido, una idea clave a trabajar con los alumnos y que debe sostenerse en este ciclo es la de diferenciar situaciones deterministas y aleatorias, sin desconocer algunas dificultades que tienen los niños para realizarlo.

En Batanero y Serrano (1995) se señala una de esas dificultades: las niñas y los niños "explican sus ganancias altas o bajas en un juego de azar como el resultado de la habilidad o concentración" (pág. 22). Y agregan, "Fischbein y Gazit (1984) estudiaron estas creencias y, en Fischbein y Cols. (1991), muestran que algunos estudiantes suponen que es posible controlar un experimento aleatorio si lo repiten varias veces".

O sea, es necesario que los alumnos se enfrenten a situaciones donde intervenga el azar (Batanero, 2013) para reconocer diferencias entre los fenómenos deterministas y los aleatorios. Con ese propósito, es necesario presentar propuestas donde los niños puedan manipular objetos de su entorno (dados, monedas, cartas, etc.) con la intención de generar condiciones para la comprensión de la aleatoriedad de manera intuitiva, como así también ayudar a tomar conciencia de la presencia de lo aleatorio en múltiples situaciones de la vida cotidiana.

Resultará clave para el desarrollo de estas nociones que venimos mencionando, y para una posterior formalización de la probabilidad con sentido, que el alumno realice experimentos donde la actividad central consista en observar los resultados del experimento. Esta observación junto con intervenciones que el docente considere pertinentes abonaría en los alumnos a, por ejemplo, poder diferenciar el experimento de sus resultados, observar que hay experimentos que tienen diferente cantidad de resultados, poder identificarlos, comunicarlos y hasta cuantificarlos, o asociar que si un experimento tiene un solo resultado, es seguro que ese resultado suceda.

Queremos hacer notar que las definiciones de estas ideas que consideramos clave para el inicio del trabajo en probabilidad no son objeto de enseñanza en la escuela.

En esta breve introducción intentamos explicitar, apoyados en autores y la propia experiencia, que trabajar en probabilidad exige utilizar un pensamiento con características y dificultades distintas al determinístico. Por ello, la enseñanza de la Matemática en la escuela tiene la responsabilidad de enfrentar a los alumnos a actividades donde su intuición primaria entre en conflicto con razonamientos propios de los fenómenos aleatorios. El hecho de que los alumnos reflexionen sobre este conflicto, sus causas y los razonamientos erróneos propios o de sus compañeros generará condiciones favorables para el aprendizaje de la probabilidad.

## b. Avances en el Primer Ciclo

Los problemas que integran la siguiente familia pretenden ser un posible punto de inicio para la enseñanza de las nociones ya mencionadas que se abordarán en este ciclo en torno a la probabilidad. También tienen el propósito de funcionar como ideas generadoras de nuevos problemas tendientes a introducir y desarrollar la percepción del azar por parte de los alumnos.

Como señalamos en la parte anterior, la puerta de entrada a la probabilidad debiera ser el reconocimiento y desarrollo de cierta intuición a partir de enfrentar a los alumnos a situaciones donde se ponga en juego el carácter aleatorio de algunas experiencias. Para ello, se presentan situaciones aleatorias sencillas con presencia del azar en la vida cotidiana en las cuales el alumno enfrentado a ellas, e intervenciones docentes con intencionalidad de enseñanza, pueda explorar, manifestar su opinión, hacerse preguntas e intentar responder las que formule el docente o algún compañero para diferenciar situaciones aleatorias y deterministas.

Posteriormente, se pretende avanzar en dirección a que los alumnos reconozcan el carácter aleatorio de algunas experiencias. En ese sentido, se propone que en un experimento puedan distinguir resultados imposibles, resultados donde existe total seguridad de su ocurrencia y otros donde es posible pero no es seguro que ocurra.

Para ello, el trabajo en NI5 y primer año propone como contenidos matemáticos a trabajar los sucesos en la exploración de situaciones de azar y los experimentos aleatorios. Ambos contenidos, los sucesos y los experimentos aleatorios, son claves en términos de punto de apoyo para la construcción de ideas en torno a la probabilidad. Entendemos esta explicitación como una primera aproximación a diferenciar experimentos aleatorios de los determinísticos. Para segundo y tercer año, a partir de experiencias sencillas que los alumnos puedan realizar, es plausible promover debates entre ellos sobre el conjunto de todos los posibles resultados del experimento que realizaron. También se prevé introducir una clasificación de los sucesos, donde sería importante señalar sus características para diferenciarlos entre sí: sucesos seguros, posibles e imposibles.

Consideramos postergar la entrada a esta nueva clasificación de los sucesos, en simples y compuestos, para el final del segundo ciclo al igual que el trabajo con el diagrama de árbol para no centrarnos inicialmente en los problemas donde exista un número importante de resultados que impliquen la utilización de esta herramienta de organización.

### c. Contenidos programáticos y perfiles

Al analizar en el Programa 2008 los contenidos programáticos correspondientes a probabilidad, vemos que están centrados en la realización de experimentos y la diferenciación entre distintos tipos de sucesos.

| Año | Contenidos ligados a los perfiles |
|---|---|
| **Cinco años** | Los sucesos en la exploración de situaciones de azar. |
| **Primer año** | Los experimentos aleatorios. |
| **Segundo año** | El espacio muestral. La diferenciación de sucesos: seguros, posibles e imposibles. |
| **Tercer año** | Sucesos simples. |

Al poner en relación los contenidos año a año del cuadro anterior con los perfiles de egreso de tercer año se deriva la siguiente tabla.

| Conceptos y contenidos programáticos vinculados | Perfil de egreso de tercero |
|---|---|
| Sucesos Simples y Compuestos | Reconocer sucesos seguros, posibles e imposibles. |

## 6.2 Familias de problemas

### a. Experimentos y sucesos

Como ya señalamos, consideramos esencial para el trabajo inicial en probabilidad que los niños realicen efectivamente experimentos, discutan y logren identificar características sobre sus resultados como por ejemplo si puedo anticipar alguno, si son todos o si podría obtenerse tal resultado.

En términos de los sucesos –seguros, posibles e imposibles– es importante que los niños puedan reconocer características propias y diferenciarlos entre sí. Por ejemplo, al repetir un experimento muchas veces, algunos resultados se darán siempre, otros a veces y otros nunca. Enfrentados a caracterizar el suceso “salir 8 al lanzar un dado normal” los alumnos podrían afirmar que “en todas las veces que tiraron el dado nunca salió 8” o “seguro que no sale 8 porque no está en la cara del dado”, por lo tanto es un suceso imposible.

## ¿Qué tipos de problemas ayudan a poner en juego la aleatoriedad?

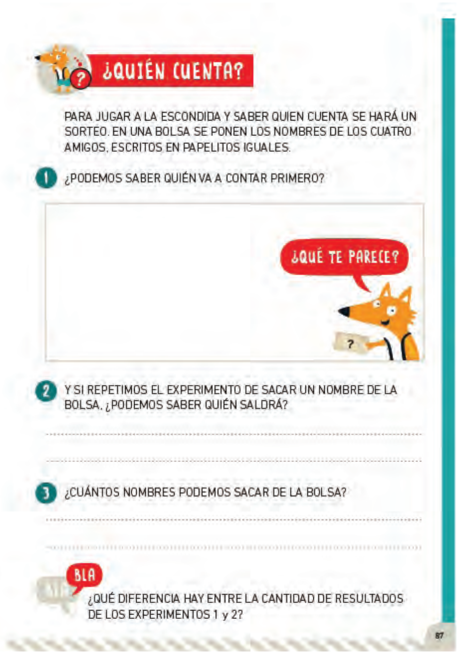
En el espacio para el tratamiento de lo aleatorio, habrá que estudiar aquellas situaciones en las que, para las mismas condiciones, existe una variedad de resultados posibles. Cada resultado se denomina suceso aleatorio, por ejemplo al tirar una moneda, puede salir cara o número, son dos posibles sucesos.

En este ciclo entonces, propondremos situaciones experimentales y anticipaciones de las alternativas que podrían ocurrir para luego contrastar la predicción con los hechos. Lo interesante en las experiencias aleatorias es que, si bien no se puede predecir en cada una qué ocurrirá, detrás de este aparente desorden pueden establecerse ciertas regularidades al repetir la experiencia.

# Problemas para reconocer sucesos seguros, posibles e imposibles

### Problema 1



Los experimentos que se proponen son familiares para los alumnos de todos los grados de este Primer Ciclo. El propósito es que los alumnos reconozcan que hay algunos de ellos en los cuales pueden afirmar cual será el resultado antes de su realización (experimentos deterministas) y otros en los que esto no resultará posible (experimentos aleatorios).

Se podrían ir presentando una a una las situaciones para realizar un trabajo colectivo donde se pongan a consideración de la clase las respuestas que vayan formulando para ir interrogando sus intuiciones referidas a cada situación presentada y explicitarla.

Se pretende que los alumnos puedan percibir la aleatoriedad en algunos de los experimentos y comprender la imposibilidad de predecir un resultado concreto en situaciones aleatorias cotidianas. Es esperable que a partir de la discusión en torno a estas situaciones, se reconozcan colectivamente los dos tipos de experimentos: aleatorios y deterministas. Esta acción exige anticipar el o los resultados de los diferentes experimentos presentados. Posteriormente, al retomar la reflexión sobre el experimento y sus resultados se hará entrar en conflicto sus predicciones y lo verdaderamente ocurrido.

En el experimento que consiste en dejar un rato largo, largo, largo un cubito de hielo al sol, soltar una piedra o lanzar una moneda y mirar que salió, habrá que comparar las previsiones de los alumnos con los resultados reales al realizar los experimentos en clase.

En otros, por ejemplo correr la carrera donde participen todos los compañeros de la clase, se podría solicitar que arriesguen cual sería el resultado, dejarlo por escrito y si están seguros de que será así.

Una posible conclusión por parte de los alumnos al cierre del trabajo con el problema es “hay experimentos donde no se puede predecir el resultado”.

### Problema 2

Respondan cada pregunta.

- Si lanzamos un dado, ¿podemos estar seguros de que saldrá un 5 en la tirada?
- Si lanzamos un dado, ¿es posible obtener un 7?
- Si acercamos dos imanes a corta distancia entre sí, ¿se van a juntar?
- Si dejamos de regar una planta, ¿qué le pasará?
- Si lanzamos una moneda al aire, ¿qué resultados podemos obtener cuando caiga al suelo?, ¿estamos seguros de qué lado caerá?

Este problema se propone enfrentar a los alumnos de primero, segundo y tercer año a otra batería de experimentos donde se incorporan preguntas para reflexionar sobre si se trata de resultados que podrían ocurrir o no (posibles), que no podían ocurrir (imposibles) o que ocurrían siempre (seguros).

Se podría presentar organizando la clase en pequeños grupos para que intercambien sus ideas y respondan, por escrito y luego compartir lo producido con el conjunto de la clase.

En la puesta en común, convendrá formular preguntas para que expliciten sus ideas personales sobre lo que significa que algo sea seguro o imposible, por ejemplo.

Por otro lado, también se propone que los alumnos distingan un experimento (conjunto de condiciones determinadas) de sus posibles resultados. La experimentación directa como recurso de enseñanza y la reflexión sobre estas situaciones serán elementos claves para la comprensión de ambos conceptos de la probabilidad, experimento y suceso.

Centrándonos en el último experimento, lanzar una moneda al aire, es esperable que todos los alumnos respondan correctamente a la primera pregunta: cara o número. Podría ser que algún alumno trajera a la clase la posibilidad de que la moneda caiga de canto al piso. En caso de que esto ocurra, sería interesante promover la discusión entre ellos para que expliciten argumentos para ver si es posible dirimir este asunto que trajo un compañero y tomar alguna decisión al respecto.

Se espera que enfrentados a la segunda pregunta y basado en los resultados de su exploración del lanzamiento de la moneda, los alumnos respondan que no se puede predecir con seguridad el resultado que se obtendrá. En este caso, anotar las observaciones de la exploración y que los alumnos lo analicen es un recurso potente en términos de acercarlos a la naturaleza aleatoria.

Como conclusiones de esta clase se podría arribar a expresiones como: “si lanzamos un dado, que salga 5 es posible pero no es seguro”, “si lanzamos un dado, sabemos que es imposible que salga un 8”, “si lanzamos un dado, pueden ocurrir seis sucesos distintos: que salga 1, que salga 2”.

**Problema 3**

Un día, en el recreo de la escuela, Mulita le dice a un amigo que es muy posible que mañana lo pase a buscar para ir juntos a jugar al fútbol. Ocurre que al otro día no pasó a buscarlo. ¿Piensas que Pedro le mintió a su amigo? ¿Por qué?

Bajo la misma idea del problema anterior, pero en este caso con el propósito de subdividir la categoría de los resultados posibles de un experimento se introduce a la discusión entre los alumnos la idea del resultado “muy posible”.

Nuevamente se pretende que los alumnos expongan sus creencias personales sobre el resultado de un experimento que podría ocurrir pero basado en la cualidad, aspecto que hasta ahora no se propuso. Consideramos que este problema y los siguientes podrían ser abordados tanto en segundo año como en tercer año.

**Problema 4**

Si lanzamos de nuevo la misma moneda al aire, ¿obtendremos otra vez el mismo resultado? ¿Por qué?

En este problema, se vuelve sobre un experimento ya realizado y discutido en el problema 2, con el propósito de introducir la idea de que el experimento que se reproduce bajo las mismas condiciones que el anterior, no tiene memoria de lo ocurrido. Las respuestas correctas y erróneas traerían nuevamente las nociones personales construidas por los alumnos respecto de la situación como nueva posibilidad con doble propósito; hacer entrar en crisis las ideas erróneas y que expliquen sus respuestas. Por ejemplo, algún alumno (de manera incorrecta) podría responder que sí saldría dos veces cara por un tema de la suerte o que sí se tira la moneda igual que antes saldrá lo mismo y una que responda que sí basando su explicación en la existencia de la misma posibilidad que salga lo mismo. El maestro puede proponer que los alumnos dibujen los resultados posibles, para asegurarse de que están entendiendo el proceso y habilitar a aquellos que no logran verbalizar la respuesta.

Se podría concluir que en este experimento solo existen dos resultados posibles, que salga cara o número.

## Problema 5

Mulita y Zorrito están jugando a piedra, papel o tijera.

Escribir tres oraciones usando “suceso seguro”, “suceso posible” y “suceso imposible”.

Después de que los alumnos reconozcan expresiones propias de la probabilidad (seguro, experimento, resultado, imposible, posible) se les puede solicitar que escriban oraciones donde en cada una incorporen alguna de las mencionadas expresiones.

Esta actividad, por un lado, exige producir un texto donde se debe reconocer y determinar cuál es el experimento que pensó un compañero de clase y, por otro lado, ayudaría a cargar de sentido, ahora desde la escritura y de experimentos que los alumnos seleccionen, las expresiones hasta ahora utilizadas en probabilidad. Por ejemplo, frente a la escritura “Mulita y Zorrito están jugando a piedra, papel o tijera”, el maestro podría intervenir proponiendo que otros compañeros reconozcan el experimento, sus resultados y poner a discusión el significado que cobran las expresiones utilizadas en probabilidad en las situaciones elaboradas por los propios alumnos.

# Capítulo 7: Estadística en el Primer Ciclo

## 7.1 Consideraciones curriculares

### a. El trabajo estadístico en el Primer Ciclo

Cuando hablamos del trabajo estadístico en el Primer Ciclo hacemos referencia al comienzo del abordaje de algunos aspectos iniciales de la estadística descriptiva. En este sentido, el centro es la recolección de datos, identificando inicialmente alguna variable a estudiar. Obviamente esta variable a estudiar debe ser de interés de los alumnos.

Luego de la recolección de esos datos, es importante organizarlos adecuadamente para poder establecer relaciones sencillas entre ellos así como también poder interpretarlos con el fin de tomar algunas decisiones. Para la interpretación de esos datos es necesario llevar a cabo la producción de algunos gráficos.

La interpretación de listas, tablas y gráficos es un foco importante en este nivel. Entonces, poniendo la mirada en la lectura, nos podemos preguntar:

#### ¿Qué lecturas e interpretaciones estadísticas es posible trabajar en este Primer Ciclo?

La búsqueda de respuestas a esta pregunta es una parte esencial de este bloque temático en donde la lectura de textos estadísticos en Matemática se constituye en una habilidad fundamental para entender una información, sacar conclusiones sencillas y comunicarlas a otras personas con pertinencia y adecuación a la fuente. Dentro de textos estadísticos es posible considerar la lectura de listas, tablas y gráficos de diferente tipo: gráficos de barras, circulares, de punto. Comprenderlos, según Friel, Curcio y Bright (2001), implica construir y poner en juego habilidades con el fin de “entender el significado de gráficos creados por otros o por ellos mismos”.

Se encuentran gráficos en la prensa diaria, en Internet y también en textos de ciencias sociales y naturales. Por lo tanto, es necesario trabajar este tipo de registros que implican establecer una relación entre lo representado en el gráfico y una realidad que nos circunda. Interpretar un gráfico requiere conocimientos tanto sobre la realidad que se representa así como aspectos convencionales de construcción del gráfico que se irán desarrollando en el correr de este documento.

Quienes investigan la lectura de gráficos (Brassel & Rowe, 1993; Moschkovich *et al.*, 1993; Yerushalmi & Shternberg, 2001; Wainer, 1992), han identificado distintos niveles de procesamiento de la información así como han afirmado que la interpretación de datos exige un pensamiento matemático relacional cuyo aprendizaje requiere de un tiempo prolongado de desarrollo, lo que hace necesario iniciar su enseñanza tempranamente. Se presenta un tipo de clasificación elaborada por Wainer (1992) donde se especifican algunas características de los niveles de interpretación estadística:

> **Nivel elemental**, que implica la extracción de datos en forma explícita.
>
> **Nivel intermedio**, que concierne al establecimiento de relaciones entre los datos.
>
> **Nivel alto**, que requiere de una comprensión profunda de los datos y el pronóstico de posibles comportamientos. (Destacado en el original)

El recorrido general de este ciclo será:

- por un lado, la lectura de distintos tipos de información: listas, tablas, gráficos, y
- por otro, iniciar el trabajo con la estadística descriptiva como "método": seleccionar algunas variables para ser estudiadas, recoger información sobre ellas, organizarlas en tablas y gráficos para luego interpretarlos con el fin de realizar algunas conclusiones.

## b. Avances en el Primer Ciclo

Durante el recorrido en el ciclo se podrán establecer avances en relación a la interpretación de distintos tipos de gráficos y tablas, así como también en las producciones de distintos gráficos.

Durante todo el ciclo se podrá realizar lectura explícita de datos. A partir de segundo también será posible realizar lectura de datos implícitos.

La interpretación y producción de listas para recoger datos puede usarse en inicial y primero y avanzar en segundo y tercer grado en la confección de tablas. Tanto en segundo como en tercero será posible establecer relaciones entre la información proporcionada en un gráfico y una tabla. Es posible realizar la interpretación de pictogramas y de gráficos icónicos a lo largo de todo el ciclo, complejizándolos. Asimismo, se podrán proponer actividades con el fin de completar gráficos con títulos y etiquetas en los ejes.

La producción de gráficos es también posible y sería conveniente hacerla desde segundo año dada la complejidad de su elaboración y puede contemplar algunos de estos aspectos:

- transformar en un gráfico o tabla información extraída de un enunciado en lenguaje natural y viceversa,

- realizar o completar un gráfico a partir de la presentación de datos en una tabla o lista.

En tercer grado es importante avanzar en la profundización de la producción de informes breves en relación a la información presentada en un gráfico, una tabla y la elaboración de conclusiones.

## c. Contenidos programáticos y perfiles

Al analizar en el Programa 2008 los contenidos programáticos correspondientes al eje Estadística los encontramos así:

| Año | Contenidos |
|---|---|
| **NI5** | La organización icónica de la información cualitativa. |
| **Primer Año** | Análisis de la frecuencia de los sucesos. La representación en tablas. |
| **Segundo año** | La descripción e interpretación de la información en tablas. La representación gráfica de la información. |
| **Tercer año** | La variable para precisar la recolección de datos. Las conclusiones a partir de la interpretación de tablas. |

Al considerar el siguiente cuadro en relación con el anterior, de contenidos año a año, se advierte que los perfiles de egreso de tercer año derivan, para cada aspecto, de la secuenciación planteada.

| Conceptos y contenidos programáticos vinculados | Perfil de egreso de tercero |
|---|---|
| **El trabajo estadístico.**<br>Las conclusiones a partir de la interpretación de datos. | Registrar y organizar datos en tablas y gráficos sencillos a partir de las distintas representaciones. |

## 7.2 Familias de problemas

### a. El registro, la interpretación de datos y su organización en tablas y gráficos

En general en este ciclo de primaria se pone tradicionalmente el foco en la confección o producción de gráficas a partir de datos ofrecidos por el docente o recogidos de manera colectiva. En contraposición a este proceso, casi siempre se da por hecho que la lectura de dichas producciones es natural. Sin embargo ninguna de esas acciones es natural, ni la producción ni la interpretación de gráficos y tablas.

Es así que, tanto la interpretación de gráficos y tablas como la producción de los mismos, necesitan ser objeto de enseñanza. Entendemos la interpretación de los gráficos y tablas como lectura de los mismos. Por eso a continuación presentamos familias de problemas que se centran sobre todo en el proceso lector de dichos registros de representación que son exigencia lectora para los niños del siglo XXI.

Por otro lado, no descuidamos la producción de listas, tablas y gráficos, pero sabemos que la exigencia de producirlas aparece regularmente en los trabajos de enseñanza, es decir, habitualmente se destina un tiempo áulico para ello.

Estos dos procesos, tanto el de la interpretación y la producción de listas como el de tablas y gráficos, son caras distintas de una misma moneda pero que exigen por parte de los alumnos procesos cognitivos diferentes y por lo tanto consideraciones diferenciadas para su enseñanza.

Además, cuando se decide previamente comenzar a recorrer parte del "método estadístico descriptivo" eligiendo qué se va a indagar, cuál será la variable, qué valores podrá tomar, por qué nos interesa etc., estos elementos ayudan a la confección e interpretación de las tablas y gráficos pues ya tenemos el contexto que nos brinda cierta información. Sin embargo, cuando se ofrecen ya confeccionados, tanto las listas como las tablas y los gráficos, se necesita identificar las variables, los valores que toman a partir de datos ofrecidos. Estos procesos son bien diferenciados y por eso es necesario recorrerlos ambos en las clases del Primer Ciclo de primaria.

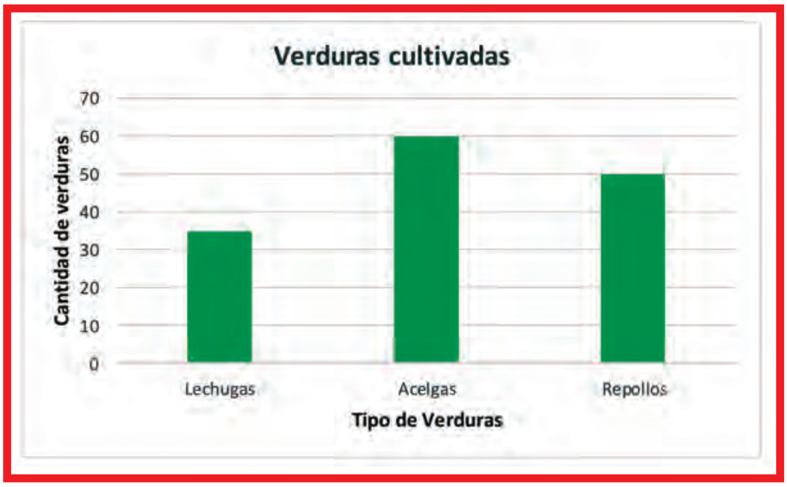
### Problemas para leer y producir gráficos sencillos

Es importante realizar un "itinerario lector" con el alumno, que se irá desarrollando a lo largo de la presentación de esta familia de problemas.

Por ejemplo, para un segundo año o tercer año se puede presentar el siguiente gráfico de barras:

**Problema 1**

En la huerta de una escuela rural se han cultivado algunas verduras. La gráfica muestra el tipo de verduras y la cantidad de cada una de ellas.




¿Cuáles son las verduras cultivadas?

¿Cuál es la verdura que se cultivó más?

¿Cuántas verduras se cultivaron en total?

En un primer momento de la lectura de este gráfico, como texto estadístico, es posible identificar la variable interviniente: tipos de verduras cultivadas. Esta variable está asociada a la cantidad cultivada de cada tipo.

Para responder a la primera de las preguntas que plantea el problema *"¿Cuáles son las verduras cultivadas?"* habrá que enseñar a leer dónde encontrar la información. Es decir, ubicar en el gráfico dónde figura esa información. En este caso se encuentran en el eje horizontal[30].

De esta manera, algunos de los elementos estructurales del gráfico se describen por la necesidad de "leer".
En este caso se focaliza el gráfico formado por figuras geométricas –rectángulos– llamadas barras, que se presentan espaciadas, del mismo ancho y que "se apoyan" en el eje horizontal.

*¿Qué representa cada barra entonces?* Cada barra representa la frecuencia absoluta de cada verdura cultivada. Pensando en los alumnos, se podría llegar a concluir con ellos, que cada barra representa la cantidad de lechugas (barra 1) de acelgas (barra 2) de repollos (barra 3).

*¿Cuál es la verdura que se cultivó en mayor número?* Preguntar por el mayor valor de la variable no genera gran dificultad pues el alumno identifica "la que se cultivó en mayor número" con la barra más alta. El niño realiza un reconocimiento visual del gráfico que lo habilita a responder sin necesidad de considerar el valor de cada variable y establecer comparaciones numéricas. También, es importante promover que el alumno comunique cómo le fue posible responder al problema, cuál es el dato del problema en el que se fija, por qué eligió ese.

Por otro lado, saber que la altura de la barra correspondiente a la lechuga indica 35 será toda una discusión posible a dar en la clase.

Esta pregunta está asociada a la mayor frecuencia de la variable (tipos de verduras) que es la moda.

[30] El eje horizontal se llama eje de abscisas pero es una información que no es necesaria manejarla con los alumnos exclusivamente con el nombre. Llamarle eje horizontal es suficiente para este nivel.

A través de distintas preguntas, formuladas por el maestro y por los alumnos, es posible ir analizando otros elementos: *¿Qué otra información nos ofrece el texto? ¿Nos informa sobre la cantidad de acelgas plantadas? ¿Dónde? ¿Cuántas?* Es así que se dirige la mirada hacia el otro eje donde figura la cantidad de verduras. En este caso, se ha seleccionado una escala que va de diez en diez.

De este modo el eje vertical ofrece la información de la cantidad de cada verdura cultivada en la huerta. Para saber cuántas verduras en total se cultivaron será necesario sumar todas las frecuencias que indican la altura de cada barra que se lee en el eje vertical.

Según Friel, Curcio y Bright (2001), los elementos estructurales de un gráfico son:

- Palabras que aparecen en el gráfico, tales como: el título del gráfico –verduras cultivadas, las etiquetas de los ejes–, cantidad de verduras en el eje vertical y tipo de verduras en el eje horizontal. Resulta importante incluir títulos y etiquetas no ambiguas de manera de no generar nuevos obstáculos a la lectura de estos textos.
- El contenido matemático subyacente en el gráfico. Por ejemplo, los conjuntos numéricos empleados. En este caso, hacemos referencia al conjunto de los números naturales en un dominio numérico del 0 al 70.
- Los convenios específicos –llamados también especificadores– que se usan en cada tipo de gráfico y que se deben conocer para poder realizar una lectura o construcción correcta: uso de ejes, barras, escala. Las investigaciones muestran que los histogramas, los gráficos de barras y los pictogramas son los que requieren de una lectura más sencilla para el alumno de escolaridad primaria.

Se ha realizado un análisis del problema presentado, que implica la extracción de datos explícitos, y se han puesto en relación elementos de un eje con los del otro eje. Se conoce el contexto del gráfico (huerta) y las variables que se incluyen. Se lee la frecuencia asociada a un valor de la variable al cuestionar sobre la cantidad de lechugas plantadas.

Para inicial y primero, el gráfico tendrá otras características. A continuación especificamos.

**Problema 2**

El gráfico del Problema 2 en NI5 o en primer año puede ser construido por los niños en la clase. Durante la construcción la gestión de la maestra, como siempre, es sustantiva. Obsérvese que aunque semejan barras cada una está formada por un papel glasé que representa a cada niño. Por esa condición es un gráfico de tipo icónico.

En nivel inicial la consigna se dará de forma oral y en primer grado se decidirá según sea si los niños ya leen o no.

A través de la gestión de la lectura del gráfico como texto que es, el maestro podrá incorporar nuevas preguntas que hagan referencia a información implícita, es decir, puede transitar hacia otro nivel de complejidad (nivel intermedio):

¿Cuántos niños son en la clase? ¿Cuántos cumplen durante los meses de vacaciones de verano?

Al producir las respuestas, la idea es que los alumnos las argumenten, muestren en el gráfico de dónde extraen la información, etc. Por ejemplo, en un primer grado, en lugar de contar cada papel que representa a un niño para saber el total de niños, puedan resolverlo por suma.

Nuevamente, la frecuencia del número de cumpleaños por mes es la que da la altura de la barra. Será importante buscar, además de una lectura visual por la altura de cada barra, que se haga una correspondencia con la cantidad de niños por barra que están representados por cada papel glasé.

Si pensamos en alumnos de inicial y primero, la presentación de pictogramas puede ser un buen inicio. Veamos un ejemplo:

**Problema 3**


Para poder responder las preguntas habrá que discutir de dónde se puede extraer la información sobre la cantidad de goles. Habrá que ponerse de acuerdo que cada pelota representa un gol. A partir de este consenso, será posible determinar las respuestas.

Volviendo a segundo y tercer grado, un ejemplo de pictograma es el siguiente:

**Problema 4**

Estas son las ventas de entrada de un cine en el primer semestre del año.


¿Cuántas personas asistieron al cine en mayo? ¿Y en todo el semestre? ¿Cuál fue el mes de mayor venta de entradas? ¿Cuántas personas entraron en ese mes? ¿Cuáles podrían ser las razones que hicieron aumentar la cantidad de asistentes al cine?

María afirma que en mayo se vendieron el triple de entradas que en abril.

Tú, ¿qué piensas? ¿Estás de acuerdo? ¿Por qué?

En este problema se presenta un pictograma que se define como una representación gráfica que incluye figuras relacionadas con los datos que se están analizando. En este caso, se representan entradas de cine y cada entrada equivale a 2000 personas. Es una diferencia sustantiva con los dos problemas anteriores. Para poder responder las preguntas presentadas los alumnos necesitarán leer el gráfico para extraer datos. El grado de dificultad es mayor puesto que cada entrada del gráfico representa en la realidad 2000 entradas. Esta dificultad será necesario controlarla durante toda la resolución del problema.

En la consigna del problema se presentan muchas preguntas. El maestro podrá elegir cuáles proponer en su grupo y en qué momentos. No todas son del mismo grado de dificultad. La explicación que los alumnos produzcan es determinante. Nuevamente será necesario identificar las posibles respuestas y establecer las relaciones que son necesarias organizar entre la lectura de la información del gráfico y los cálculos elegidos.

## Problemas para leer y producir tablas

El problema 4 estaría pensado para un segundo o tercer año. Esto no significa que en ambos grados las producciones sean de igual profundidad. Quizás en segundo año se limiten a una lectura explícita de la tabla, identificando cuántos libros de cada tipo se han prestado, cuáles son los que “se prestan más”. En un tercer grado se puede avanzar a cuántos se prestaron en total y si tuviesen que comprar libros nuevos cuál sería el criterio para hacer la compra, etc.

**Problema 4**

María trabaja en la biblioteca de la escuela. Al finalizar cada mes realiza un estudio sobre los libros más leídos. Este mes María presenta el siguiente cuadro:

| Libros más leídos | Cantidad de niños |
|---|---|
| Cuentos Tradicionales | 25 |
| Enciclopedias | 10 |
| Cuentos de ciencia ficción | 18 |
| Historietas | 27 |
| Cuentos de terror | 31 |

¿A qué conclusiones llegó María luego de analizar estos datos?

A partir de la pregunta del problema 4 es posible analizar cada uno de los elementos de la tabla. Comparar conclusiones, corroborar su pertinencia en relación a la información recogida pueden ser opciones válidas en esta tarea que, según Curcio (1989), corresponde a dos categorías distintas:

- "leer los datos": lectura literal de la tabla o gráfico y
- "leer dentro de los datos": integrar e interpretar esos datos.

La lectura de tablas es también un objetivo de Primer Ciclo. Su interpretación requiere relacionar la información que se expone en dos columnas, identificar cuál es la variable y cómo hacer corresponder esos datos.

Asimismo, se podrá proponer que *confeccionen un gráfico* con los datos de la tabla. Discutir qué tipo de gráfico usar será relevante: barras, icónico, pictográfico, de puntos.

Una reformulación posible del trabajo con tablas para nivel inicial y primer año es recoger información sobre los libros que se leen en la biblioteca de la clase. Para ello se pondrá a discusión cómo registrar los libros que cada uno lee y categorizarlos en menos tipos que las categorías del problema 4. Por ejemplo podría ser: libros de cuentos, historietas, de ciencias, de animales. Un trabajo previo a la tabla es *la lista* con el fin de organizar la información. La lista, como forma de registro, es similar a una tabla sin completar, puesto que cada columna no tiene nombre, ni tampoco aparecen las divisiones que caracterizan a las tablas. Es semejante a la lista de los "mandados".

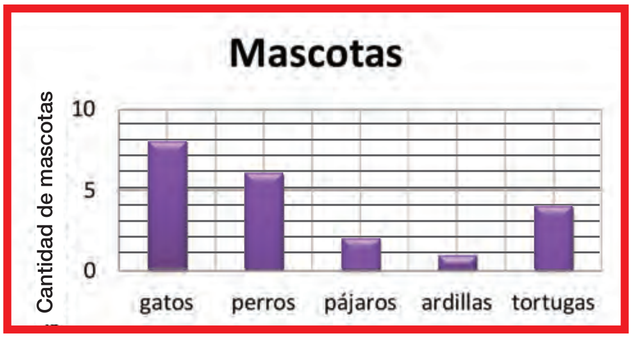
En nivel Inicial puede usarse un registro pictográfico o icónico si no surgen los numerales para anotar la frecuencia de cada valor de la variable. Luego de la confección de la lista se podrá, según cada grupo, extraer conclusiones sobre qué libros se leen más, cuáles menos, cuántos se han leído en el mes o en el semestre, etc.

A continuación se presenta un problema donde se abordan las relaciones entre tipos de registro gráfico: gráfico-tabla. Está pensado para un segundo o tercer grado.

Confeccionar la tabla en relación a la información que se presenta exige:

**Problema 5**

En una clase de una escuela, los alumnos han armado esta gráfica para comunicar la cantidad de niños que tienen mascotas en sus hogares.




Ahora desean enviar estos resultados a las familias en el boletín de noticias pero presentados en una tabla. Ayuda a estos niños a realizar la tabla que corresponde a este gráfico.

- Organizar la tabla en dos columnas.
- Titular cada columna.
- Buscar cuántos niños tienen cada mascota que se presenta.
- Enumerar todas las mascotas del gráfico (frecuencia de cada mascota).

Se puede observar, en el gráfico que se presenta, la presencia de un fondo cuadriculado que sustituye las líneas horizontales con las que veníamos trabajando en algunos problemas anteriores.

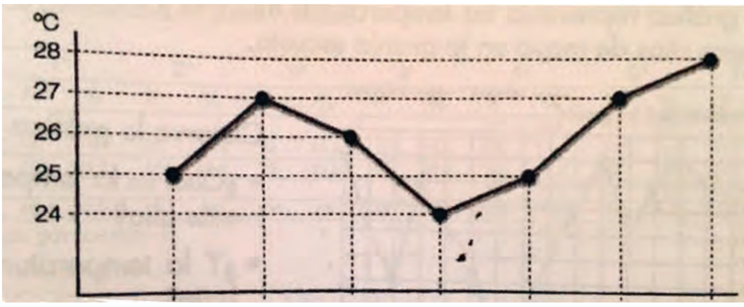
## Problema de lectura de gráficos incompletos

También es posible introducir la lectura de gráficos de puntos y tal como lo explicita el título, presentados en forma incompleta.

El siguiente problema muestra una posible aproximación al trabajo con ellos.

**Problema 6**

Este gráfico muestra la temperatura recogida durante una semana en el mes de noviembre en el Uruguay.




Completa el eje horizontal iniciando en el día lunes.

¿Qué conclusiones es posible extraer de este gráfico?

El gráfico del problema es una típica representación de puntos confeccionado a partir de la recolección de datos de la temperatura del día durante una semana. Se informa que corresponde al mes de noviembre, donde en nuestro hemisferio es primavera. Se exige que se complete el eje horizontal con los días de la semana. Los niños necesitarán identificar los puntos de corte de las líneas punteadas con el eje de abscisas para relacionar cada uno de esos puntos con los días de la semana. Algunas de las conclusiones que se pueden extraer pueden ser: que el domingo fue el día de más calor, que el de menor temperatura fue el jueves, que la diferencia entre el mayor valor y el menor fueron 4° C.

Presentar este tipo de gráficos habilita la posibilidad de compararlo con los gráficos de barras, los pictográficos. También a partir de la lectura del gráfico se podrá armar la correspondiente tabla de valores.

Asimismo se podrá profundizar en discutir la siguiente pregunta: ¿cuál es la razón que lleva a utilizar un gráfico de puntos y no de barras? Esta interrogante abre el camino hacia la reflexión sobre la pertinencia o adecuación de cada tipo de gráfico a la situación que se analiza.

## Bibliografía Capítulo 1

Kamii, C. (1988). *El niño reinventa la aritmética. Implicaciones de la teoría de Piaget.* Madrid: Ed. Aprendizaje Visor.

Lerner, D. (2005). “Tener éxito o comprender. Una tensión constante en la enseñanza y el aprendizaje del sistema de numeración”. En M. Alvarado, y B. M. Brizuela (Comps.) *Haciendo números. Las notaciones numéricas vistas desde la Psicología, la Didáctica y la Historia.* México: Paidós Educador.

__________, (2007). Hacia la comprensión del valor posicional (Ponencia). Jornadas sobre la Enseñanza de la Matemática. Reproducida en DVD en *Revista 12(ntes) Enseñar Matemática*. Buenos Aires, N.° 5.

Lerner, D.; Sadovsky, P. (1994). “El sistema de numeración: un problema didáctico”. Cap. V. En C. Parra, I. Saiz (Comps.) *Didáctica de las matemáticas. Aportes y reflexiones.* Buenos Aires: Paidós Educador.

Pazos, L. (2008). “Trabajar numeración en los primeros años de la escolaridad”. *Revista Quehacer Educativo.* N.° 90 (agosto). Montevideo: FUM-TEP.

Ressia de Moreno, B. (2003). “La enseñanza del número y del sistema de numeración en el Nivel inicial y el 1.° de la EGB”. En Panizza, M. (Comp.), *Enseñar Matemática en el Nivel Inicial y en el Primer Ciclo de la EGB. Análisis y propuestas. págs. 73-130.*

Sadovsky, P. (2005). *Enseñar Matemática hoy. Miradas, sentidos y desafíos.* Buenos Aires: Paidós.

## Bibliografía Capítulo 2

*Programa para el Mejoramiento de la Enseñanza de la Matemáticas en ANEP.* (2006). Cuadernos de Estudio II. Montevideo. ANEP.

## Bibliografía Capítulo 3

Broitman. C. (1999). *Las operaciones en el Primer Ciclo. Aportes para el trabajo en el aula.* Argentina: Ediciones Novedades Educativas.

Chemello, G. (1997). *El cálculo en la escuela: las cuentas, ¿son un problema?* En Los CBC y la enseñanza de la matemática. Iaies (Comp.) AZ Editores. Buenos Aires.

Parra, C. (1997) *Cálculo mental en la escuela primaria* Cap. VII en PARRA, C y SAIZ, I. (comps.) Didáctica de matemáticas Aportes y reflexiones. *Editorial Paidós Educador.*

Procedimientos, realizados por alumnos de la escuela pública uruguaya.

Rodríguez Rava, B. & Palumbo, A. (2002). *De las operaciones, ¿qué podemos enseñar?* En El Quehacer matemático en la escuela (pág. 130). Fondo Editorial Queeduca – FUMTEP.

## Bibliografía Capítulo 4


Broitman, C.; Itzcovich, H. (2003). “Geometría en los primeros años de la escuela primaria: problemas de su enseñanza, problemas para su enseñanza. En Panizza (Comp.) *Enseñar matemática en el Nivel Inicial y Primer Ciclo de la EGB. Análisis y propuesta.* Buenos Aires: Paidós.

Itzcovich, H. (2005). *Iniciación al estudio didáctico de la geometría.* Buenos Aires: Libros del Zorzal.


## Bibliografía Capítulo 5


Bressan, A. M. (1999). “La medida: un cambio de enfoque”. Documento de Desarrollo Curricular N.° 4, Educación General Básica, Consejo Provincial de Educación de Río Negro, Argentina.

Brousseau, G.; Brousseau, N. (1991). *“El peso de un recipiente. Estudio de los problemas de la medición en CM”, Gran N*, N.° 50, 1991-92, págs. 65-87. Traducción de Juan D. Godino.

Castro, E.; Rico, L.; Segovia, I. (1989). *Estimación en Cálculo y Medida*, Madrid: Editorial Síntesis S. A.

Chamorro, M. del C. (1995). “Aproximación a la medida de magnitudes en la Enseñanza Primaria”, *Uno Revista de Didáctica de las Matemáticas*, Barcelona: Grao, N.° 3, enero de 1995, págs. 31-53.

Chamorro, M. del C.; Belmonte, J. (1991). *El problema de la medida. Didáctica de las magnitudes lineales*, Madrid: Editorial Síntesis.

Damisa, C.; Pazos, L. (2007). “¿Medir es comparar?”, en anep-codicen (2007), *Cuadernos de Estudio III*, Programa para el Mejoramiento de la Enseñanza de la Matemática en anep, Montevideo, págs. 17-35.

Frías, A.; Gil, F.; Moreno, M. F. (2001). “Introducción a las magnitudes y la medida. Longitud, masa, amplitud, tiempo.” En: E. Castro (2001) *Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria*, Madrid: Editorial Síntesis, Cap. 20, págs. 477-502.


## Bibliografía Capítulo 6


Batanero, C. (2013). La comprensión de la probabilidad en los niños: ¿qué podemos aprender de la investigación? En Fernandes, J., y otros. En Actas de III Encontro de probabilidades e estatística na escola. Braga: Centro de investigação em educação da Universidade do Minho.

Batanero, C. y Serrano, L. (1995). *La aleatoriedad, sus significados e implicaciones educativas.* En Revista UNO, 5, 15-28. Grao. Barcelona.

Godino, J., Batanero, C. y Cañizares, M. J. (1987). *Azar y probabilidad. Fundamentos didácticos y propuestas curriculares.* Madrid: Síntesis.


## Bibliografía Capítulo 7


Batanero, C. (2001). *Didáctica de la Estadística*. Granada: Grupo de Investigación en Educación Estadística, Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Dolores, C.; Cuevas I. (2007). "Lectura e interpretación de gráficas socialmente compartidas". *Relime* Vol. 10, Núm. 1, marzo, 2007, págs. 69-96.

Estrella, S.; Olfos, R. (2012). "La taxonomía de comprensión gráfica de Curcio a través del gráfico de Minard: una clase en séptimo grado". *Educación Matemática*, vol. 24, núm. 2, agosto, 2012, págs. 123-133. México D. F.: México Grupo Santillana. En línea disponible en: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40525862002

## Bibliografía General

anep-ceip, (2015). *Documento Base de Análisis Curricular Año 2015,* Consejo de Educación Inicial y Primaria, Montevideo, segunda edición.

__________ (2013). *Programa de Educación Inicial y Primaria.* Año 2008. Consejo de Educación Inicial y Primaria, Montevideo: Impresora Polo S. A., tercera edición.

Brousseau, G. (1983). "Fundamentos y métodos en la Didáctica de la matemática". En *Recherche en Didactique des Mathématiques*, vol. 7.2, Grenoble: La Pensée Sauvage.

Sistema de Evaluación de Aprendizajes - SEA (2015)4.

Vergnaud, G. (1990). "La teoría de los campos conceptuales", en Recherches en *Didactique des Mathématiques*, Vol. 10, n.º 2, 3, págs. 133-170. Traducción de Juan D. Godino. Disponible en línea: http://fundesuperior.org/Articulos/Pedagogia/Teoria_campos_conceptuales.pdf, última consulta 30/04/2016.

__________ (1976): *El niño, las matemáticas y la realidad, el problema de las matemáticas en la escuela*, Ed Trillas, México.

Comisión de Análisis Curricular de la Enseñanza Escolar de la Matemática