MATEMÁTICA Y TIC

ORIENTACIONES PARA LA ENSEÑANZA

Presidencia de la Nación
ANSES
escuelas de innovación
CONECTAR IGUALDAD

Autoridades

Cristina Fernández de Kirchner

Presidenta de la Nación

Jorge Milton Capitanich

Jefe de Gabinete de Ministros

Alberto Sileoni

Ministro de Educación

Diego Bossio

Director Ejecutivo de ANSES y Presidente del Comité Ejecutivo del Programa Conectar Igualdad

Silvina Gvirtz

Directora General Ejecutiva del Programa Conectar Igualdad

Matemática y TIC : orientaciones para la enseñanza / Andrea Novembre ... [et.al.] ; coordinado por Andrea Novembre. - 1a ed. - Ciudad Autónoma de Buenos Aires : ANSES, 2015.
E-Book.
ISBN 978-987-45744-1-1
1. Matemática. 2. Recursos Educacionales. 3. Guía del Docente. I. Novembre, Andrea, coord.
CDD 371.1

Fecha de catalogación: 09/01/2015

Este material ha sido producido por el Equipo de Matemática del Plan Escuelas de Innovación de la Dirección de Comunicación y Contenidos del PROGRAMA CONECTAR IGUALDAD de ANSES.

Coordinación General del Plan Escuelas de Innovación
Romina Campopiano

Coordinación autoral
Andrea Novembre

Autores
Andrea Novembre, Mauro Nicodemo y Pablo Coll.

Colaboradores
María Julia Améndola, Rosa María Escayola, Ernesto López, Diego Melchiori, María Carmen Quercia, Hernán Rodríguez Ureta, Gloria Robalo, Gerardo Rossi, María Paula Trillini, María Elina Vergara.

Equipo de desarrollo editorial

Coordinación general
Cecilia Eva Beloqui y Magdalena Soloaga

Edición, corrección y diseño
Teresita Valdettaro

Diseño de tapa
Alan Grinberg

Estimados profesores y profesoras:

En las últimas décadas, la revolución tecnológica ha generado cambios en el modo de relacionarnos, de comunicarnos y de aprender que requieren el desarrollo de competencias y habilidades complejas. Es en este escenario global que el Programa Conectar Igualdad fue creado, a instancias de la presidenta de la Nación Cristina Fernández de Kirchner, como una política de inclusión de tecnología que, en sus cuatro años, logró sobrepasar las paredes de la escuela. Hemos logrado en este tiempo ampliar las posibilidades de desarrollo social de los argentinos y avanzamos hacia la construcción de una ciudadanía con igualdad de oportunidades.

Conectar Igualdad se planteó dos grandes objetivos: garantizar el derecho al ejercicio pleno de la ciudadanía y el acceso de todos los jóvenes a las tecnologías para eliminar la brecha digital ("Justicia Social"), y garantizar el derecho a una educación de calidad ("Justicia Educacional"). Para colaborar en el logro de estas metas, el plan de capacitación docente de ANSES, Escuelas de Innovación, elaboró una serie de eBooks de trabajo que sirven de orientación para la gestión y enseñanza con TIC, y para brindar apoyo a las prácticas cotidianas de las instituciones escolares.

Sabemos que integrar las TIC a la enseñanza es un desafío. Por eso, este material les ofrece a los docentes orientaciones y estrategias de enseñanza que permiten integrar las TIC en el aula, permitiendo clases más dinámicas y poniendo a los estudiantes en situación de generar distintas perspectivas y una nueva relación con el conocimiento. Para que esto suceda, el rol del docente es fundamental. Si bien los alumnos pueden tener cierto manejo de la tecnología, el contenido, la planificación y la organización crítica del contenido es tarea del docente.

Todas las propuestas que se ofrecen han sido probadas y validadas con profesores de distintas localidades del país. Las experiencias que se proponen están sustentadas y en permanente diálogo con el enfoque didáctico/curricular de cada área disciplinar. Lo que buscamos es alentar, a través de algunas propuestas concretas, el uso de las TIC y así fortalecer la enseñanza y el aprendizaje.

Invitamos a los docentes a animarse, a probarlas, a modificarlas, a resignificarlas. Introducir nuevas estrategias genera incertidumbre, por eso queremos acompañarlos en ese desafío.

Ustedes son los grandes protagonistas del cambio educativo, y por eso queremos acompañarlos día a día en la gran tarea que desarrollan. Estamos convencidos que la utilización de las tecnologías en sus clases serán importantes herramientas en este desafío.

Los saludo muy cordialmente,

Diego Bossio

Director Ejecutivo

ANSES

MATEMÁTICA Y TIC

ORIENTACIONES PARA LA ENSEÑANZA

Contenidos

Introducción general

La disponibilidad de computadoras en las escuelas marca una oportunidad para pensar en su utilidad para la enseñanza y aprendizaje de la Matemática.

¿Cuál es su aporte?

¿De qué manera permiten mejorar la calidad de los aprendizajes?

¿Cómo usarlas?

¿Cómo hacer que los alumnos las usen?

¿Cómo gestionar una clase en la que se trabaja con computadoras?

¿Cómo cambia la Matemática que se hace y la que se enseña cuando se trabaja con computadoras?

Todas las preguntas anteriores –y muchas otras– están en el foco de las discusiones didácticas actuales.

En este escrito nos proponemos reflexionar acerca de algunos posibles aportes de la tecnología en la enseñanza y aprendizaje de la Matemática. Enfocaremos la discusión desde tres miradas, indisolublemente relacionadas entre sí: didáctica, tecnológica y matemática.

Propondremos también secuencias de enseñanza con computadora, acompañadas de consideraciones didácticas.

Enfoque disciplinar y encuadre didáctico

Sabemos que, durante mucho tiempo, e incluso en la actualidad, la enseñanza de la Matemática se ha configurado esencialmente desde un enfoque basado en la mecanización y repetición, que supone la transmisión directa del saber: el profesor enseña y los alumnos, supuestamente, aprenden, como una consecuencia directa. Desde esa perspectiva, resultan en general alumnos que son capaces de reproducir estrategias señaladas por el profesor, pero que encuentran grandes dificultades a la hora de decidir cómo resolver situaciones nuevas para ellos. El aprendizaje de una práctica que permita resolver verdaderos problemas queda en manos de los alumnos, y no todos lo hacen con éxito.

Desde la perspectiva que adoptamos, entendemos que el objetivo es que los alumnos aprendan a hacer Matemática. Se trata de una actividad que implica mucho más que conocer definiciones, propiedades o teoremas y saber en qué momentos aplicarlos. Hacer Matemática implica tratar con problemas. Decimos *tratar* y no *resolver*, porque la resolución es solo una parte del trabajo. El conocimiento matemático no se construye como una consecuencia inmediata de la resolución de uno o más problemas, sino que requiere que el alumno se haga preguntas, que pueda explicitar los conocimientos puestos en juego para resolverlos, que determine aquellos que pueden reutilizarse en otras situaciones, que pueda apoyarse en argumentos matemáticos para dar cuenta de cómo los resolvió, defender sus posturas en un espacio de intercambio con sus pares y con el docente, interpretar las estrategias utilizadas por sus compañeros y, eventualmente, adoptarlas, etc.

Esta mirada acerca de lo que implica *hacer Matemática* está ligada a un replanteo sobre lo que se considera *enseñar*. Sostenemos que enseñar Matemática supone "generar en el aula una actividad de producción de conocimiento que en algún sentido guarde analogía con el quehacer matemático. Esto supone que el alumno se apropie de los saberes y también de los modos de producción de esos saberes, es decir, se busca desarrollar en las aulas una actividad de producción matemática que permita a los alumnos reconstruir los conocimientos".[1]

Como la actividad de producción matemática está vinculada con la posibilidad de resolver problemas, nos parece imprescindible aclarar qué entendemos por *problema*, ya que el uso de la palabra está banalizado. Como consecuencia, se ha diluido su significado y ha dejado de ser la certeza de una manera de pensar la enseñanza. De hecho, la noción de enseñar a través de la resolución de problemas es

[1] Wolman, S. y Quaranta, M. (2006)

utilizada desde marcos teóricos que difieren sustancialmente en su enfoque

Los problemas

Una idea que circula en algunos ámbitos académicos es que un problema implica una situación contextualizada. Si bien es posible considerar esas situaciones como problemas, no necesariamente lo son. Un *problema* es una situación que desafía a los alumnos a resolverla a partir de sus conocimientos disponibles, llevándolos a producir relaciones, aunque no logren llegar a una solución completa o correcta.

Si bien hablamos de un aprendizaje por medio de la resolución de problemas, estos resultan necesarios, pero no suficientes, para que los alumnos produzcan conocimiento matemático. Podemos decir que sin problemas no hay Matemática, pero resolver problemas no asegura que los alumnos construyan toda la Matemática. La actividad matemática que se podría desplegar a partir de la resolución de un problema no está contenida en su enunciado ni se logra solo al intentar resolverlo, sino que depende especialmente de las interacciones que se pueden generar a partir de él.

La clase

Las reflexiones que el docente proponga sobre los problemas que los alumnos ya enfrentaron contribuyen a la elaboración de conocimientos que no necesariamente surgen en el momento de la resolución. Así, este espacio colectivo permite que los conocimientos se socialicen y que los alumnos comuniquen sus estrategias de resolución, lo que permite conocer las estrategias de los demás y, en caso de considerarlas mejores o más adaptadas, adoptarlas. También es un espacio donde es posible explicitar las nuevas relaciones, las conjeturas que se han elaborado, identificar los saberes matemáticos vinculados a los conocimientos puestos en juegos en la resolución de los problemas, registrar las conclusiones, etc.

Este enfoque propone, en definitiva, que los alumnos aprendan Matemática haciéndola, lo cual requiere que el alumno sea un productor de conocimiento y no, un aplicador de técnicas. Para ello, tiene que hacerse responsable de la validez de sus respuestas, comunicar sus modos de resolución, discutir, defender sus posiciones, considerar las resoluciones de sus pares, establecer acuerdos, etc.

El docente

La transición de un alumno que aplica técnicas hacia uno que hace Matemática no es natural, sino que requiere de un docente que lo acompañe. Serán insumos para el cambio las instancias de reflexión colectivas que pongan el acento en cómo se pensó el problema, cómo puede saberse si la resolución es correcta o no, qué de lo que se sabe permite anticipar una respuesta, las sugerencias para registrar conclusiones, las definiciones, ayudas que pueden servir para resolver otras situaciones similares, etc. Se trata de intervenciones que apuntan a la autonomía de los alumnos, a enseñarles a estudiar Matemática.

La introducción de la tecnología

Pensar en la Matemática escolar lleva a pensar de manera crítica la actividad matemática. Nos ubicamos en una perspectiva según la cual la Matemática es un producto cultural y social.

Es un producto cultural, porque surge para resolver problemáticas permeadas por las concepciones de la sociedad en la que emergen y condicionan lo que la comunidad de matemáticos concibe en cada momento como posible y relevante.

Es un producto social, porque es el resultado de la interacción entre personas que se reconocen como pertenecientes a una misma comunidad. Las respuestas que plantean unos dan lugar a nuevos problemas que visualizan otros, y las demostraciones que se producen se validan según las reglas que se aceptan en cierto momento en la comunidad matemática. Son reglas que se van transformando históricamente, en función de los conocimientos y de las herramientas disponibles.

Si bien los cambios alcanzados en la investigación matemática tardan mucho tiempo en llegar a la escuela, creemos que lo esencial a transmitir está más vinculado con una forma de hacer.

En este escrito, nos ocuparemos de pensar sobre un cambio que ha afectado tanto a la Matemática académica como a la escolar: la introducción de la tecnología. Su uso en el ámbito académico cambió la naturaleza de muchos de los problemas y de las resoluciones posibles, así como introdujo nuevos problemas y resolvió otros.

Balacheff (2000)[2] señala que las tecnologías “modifican el tipo de matemáticas que se puede enseñar, el conjunto de problemas y las estrategias didácticas. El conocimiento profesional del profesor también debe modificarse”.

---

[2] Balacheff, N. (2000), p. 93

No debemos olvidar que la mayoría de los docentes fuimos formados en una época cuando la tecnología estaba prácticamente ausente. Se plantea entonces un doble desafío: aprender su uso y emplearla para la enseñanza.

Se trata de un conocimiento profesional que se adquiere probando, llevando al aula distintas situaciones, analizando qué sucedió, ajustando y volviendo a probar. No requiere saberlo todo con anterioridad, sino que se aprende al mismo tiempo que se enseña. Como profesores, conocemos el "vértigo" que esto produce, pero también sabemos que es el único modo en que se construyen los conocimientos docentes.

Se trata, entonces, de tomar toda la potencialidad que ofrecen programas informáticos, como GeoGebra, para mejorar las condiciones de enseñanza y aprendizaje de la Matemática, reflexionando sobre los cambios que esto genera en los problemas, las relaciones matemáticas, la Matemática que se hace y la que se enseña, la gestión de la clase, etc.

El elegido: GeoGebra

En el trabajo que venimos realizando, hemos elegido un programa en especial, que es GeoGebra. ¿Cuál es la razón de esta elección?

En primer lugar, porque es un programa diseñado como herramienta didáctica, buscando favorecer la exploración y la investigación como medios para aprender Matemática. GeoGebra incorpora las ramas de la Matemática que se deben enseñar en la escuela permitiendo interactuar entre ellas; posibilita trabajar los contenidos desde distintos registros, y existe una enorme comunidad de educadores que lo usan, los cuales comparten recursos y prácticas. Además, sus actualizaciones son constantes, es libre y multiplataforma.

El tipo de actividad matemática que permite desplegar es accesible para estudiantes de distintas edades y con diferentes niveles de conocimiento. Puede utilizarse en la escuela primaria, para explorar las propiedades de las figuras y resolver problemas que las involucran. Puede usarse en la escuela secundaria, con el objetivo de iniciar un trabajo geométrico deductivo, resolver problemas relacionados con funciones, trabajar sobre algunas cuestiones estadísticas, etc.

La potencialidad de una herramienta tecnológica como el GeoGebra se manifiesta en dos transformaciones: abre la posibilidad de abordar problemas que serían imposibles sin su ayuda y permite adoptar un enfoque experimental de la Matemática que cambia la naturaleza de su aprendizaje.

Por qué incluir las TIC en Matemática

Si bien existe un amplio acuerdo acerca de que el uso de la tecnología favorece y mejora el aprendizaje de la Matemática, su inclusión en las clases sigue un ritmo lento. La pregunta es por qué.

La integración de la tecnología no es simple porque requiere de un cambio cultural. Y los cambios culturales se acompañan de cambios de prácticas, de cambios en los problemas que se plantean, de los tipos de resoluciones que se esperan, de la forma de gestionar las clases, del modo de registro que puede hacerse del trabajo personal, de las instancias colectivas y del proyecto de enseñanza, entre otras cuestiones.

A continuación, mostraremos, por medio de un ejemplo, de qué manera la tecnología contribuye al aprendizaje de la Matemática. Se trata de una actividad bastante frecuente en las clases, que consiste en resolver una inecuación apoyándose en conocimientos referidos a la factorización de polinomios.

Con este ejemplo, mostraremos que no siempre es necesario pensar en nuevos problemas. También resulta interesante analizar de qué manera se pueden resolver los “viejos” problemas con nuevas herramientas.

Proponemos que la lectura del ejemplo se realice con el telón de fondo de las siguientes preguntas:

¿Qué cambia en la enseñanza y el aprendizaje cuando se resuelve un problema conocido utilizando tecnología?

¿Qué aportes tiene la tecnología para hacer?

¿Qué conocimientos tecnológicos y matemáticos son necesarios para un nuevo abordaje?

Un ejemplo

Problema

Resolver la inecuación $5x^3+6>-6x^2-7x$.

La resolución con lápiz y papel de inecuaciones como la dada requieren de una estrategia algebraica específica, que consiste en obtener una función comparada con cero: $5x^3+6x^2+7x+6>0$. Una vez hecho esto, se buscan las raíces para poder factorizar la expresión. La búsqueda de las posibles raíces racionales se realiza a través del teorema de Gauss; en este caso son $\pm\frac{6}{5},\pm\frac{3}{5},\pm\frac{2}{5},\pm\frac{1}{5},\pm 6,\pm 3,\pm 2,\pm 1$.

Se trata entonces de utilizar el teorema del resto para identificar cuál o cuáles de los valores anteriores es raíz de la función, lo cual implica realizar gran cantidad de cálculos. Ante la falta de información acerca de las raíces, la única manera de continuar consiste en aplicar el teorema del resto para cada uno de los valores hallados:

$$5\left(\frac{6}{5}\right)^3+6\left(\frac{6}{5}\right)^2+7\left(\frac{6}{5}\right)+6=\frac{792}{25}$$

$$5\left(-\frac{6}{5}\right)^3+6\left(-\frac{6}{5}\right)^2+7\left(-\frac{6}{5}\right)+6=-\frac{12}{5}$$

$$5\left(\frac{3}{5}\right)^3+6\left(\frac{3}{5}\right)^2+7\left(\frac{3}{5}\right)+6=\frac{336}{25}$$

$$5\left(-\frac{3}{5}\right)^3+6\left(-\frac{3}{5}\right)^2+7\left(-\frac{3}{5}\right)+6=\frac{72}{25}$$

$$5\left(\frac{2}{5}\right)^3+6\left(\frac{2}{5}\right)^2+7\left(\frac{2}{5}\right)+6=\frac{252}{25}$$

$$5\left(-\frac{2}{5}\right)^3+6\left(-\frac{2}{5}\right)^2+7\left(-\frac{2}{5}\right)+6=\frac{96}{25}$$

$$5\left(\frac{1}{5}\right)^3+6\left(\frac{1}{5}\right)^2+7\left(\frac{1}{5}\right)+6=\frac{192}{25}$$

$$5\left(-\frac{1}{5}\right)^3+6\left(-\frac{1}{5}\right)^2+7\left(-\frac{1}{5}\right)+6=\frac{24}{5}$$

$$5\cdot 6^3+6\cdot 6^2+7\cdot 6+6=1344$$

$$5\cdot(-6)^3+6\cdot(-6)^2+7\cdot(-6)+6=)-900$$

$$5\cdot 3^3+6\cdot 3^2+7\cdot 3+6=216$$

$$5\cdot(-3)^3+6\cdot(-3)^2+7\cdot(-3)+6=-96$$

$$5\cdot 2^3+6\cdot 2^2+7\cdot 2+6=84$$

$$5\cdot(-2)^3+6\cdot(-2)^2+7\cdot(-2)+6=-24$$

$$5\cdot 1^3+6\cdot 1^2+7\cdot 1+6=24$$

$$5\cdot(-1)^3+6\cdot(-1)^2+7\cdot(-1)+6=0$$

Resulta entonces que x = -1 es una raíz, por lo que la expresión dada puede escribirse como $5x^3+6x^2+7x+6=(x+1)(5x^2+x+6)$. Falta analizar que el polinomio cuadrático $g(x)=5x^2+x+6$ no tiene raíces o bien son irracionales, lo cual implica la realización de más cálculos (encontrar las coordenadas del vértice o hallar el discriminante). Recién en este momento se está en condiciones de analizar la variación del signo de la expresión de grado 3.[3]

[3]Resulta interesante pensar que, en la escuela, las inecuaciones generalmente se resuelven en un marco algebraico, sin apelar al marco funcional. Pensar las inecuaciones en interacción entre ambos marcos permite hacer uso de ellos y enriquecer la mirada.

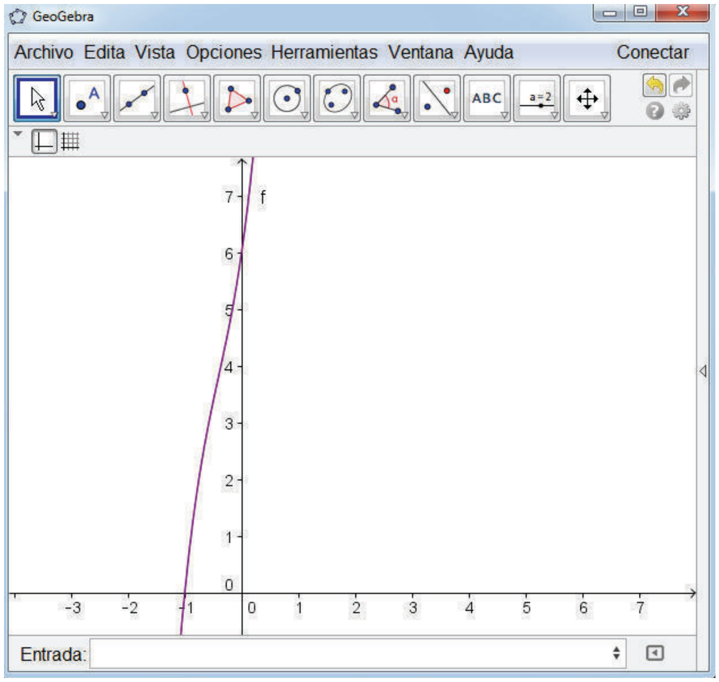
Como $5x^2 + x + 6 > 0$ para todos los valores posibles de x, entonces el signo de $(x+1)(5x^2 + x + 6)$ coincide con el signo de $x+1$. Es decir que los valores para los que se verifica que $(x+1)(5x^2 + x + 6) > 0$ son los mismos para los que se verifica que $x+1 > 0$, $x+1 > 0$.

Sin correrse del marco algebraico, bien podría argumentarse que no es necesario hacer todos los cálculos mostrados anteriormente. Es posible analizar que, como $5x^3 + 6x^2 + 7x + 6$ está compuesta solo de sumas, entonces la raíz tiene que ser negativa, descartando así los valores positivos. Existen también criterios que llevan a probar primero con aquellos valores que implican la realización de menos cuentas. Si bien el uso de ambos puede llevar a encontrar la raíz más rápidamente, se trata de una forma de resolución que los alumnos muchas veces memorizan, sin saber qué hacen en cada paso ni por qué razones.

¿Cómo podría pensarse la resolución de este problema con el uso de tecnología?

Una primera cuestión a analizar es que requiere de un cambio de marcos. No se podrá trabajar puramente en el marco algebraico, sino que deberá ser necesario pasar a un marco funcional. Este cambio de mirada lleva a los alumnos interpretar una inecuación como una función que tiene que ser mayor o menor que cierto valor. Este pasaje no es inmediato ni automático, sino que requiere de enseñanza y planificación.

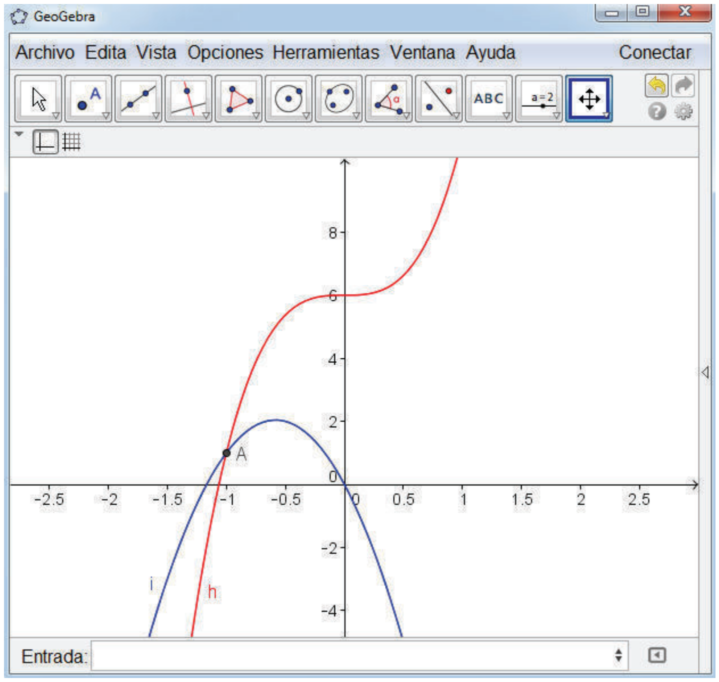
Al graficar la función con GeoGebra, es posible visualizar cuál de todas las posibles raíces obtenidas mediante el teorema de Gauss puede efectivamente serlo, y eso podrá confirmarse a través del teorema del resto. No se trata, entonces, de probar con cada valor, sino de orientar la búsqueda luego de analizar la gráfica.



Gráfica de $f(x)=5x^3+6x^2+7x+6$

$$f(-1)=5\cdot(-1)^3+6\cdot(-1)^2+7\cdot(-1)+6=0$$

Pero el problema también puede resolverse visualizando ambas gráficas en un mismo sistema de coordenadas, para analizar cuál es el conjunto de valores de x que hace que la gráfica de $h(x)=5x^3+6$ esté por encima de la de $i(x)=-6x^2-7x$.



Gráficas de $h(x) = 5x^3 + 6$ *e* $i(x) = -6x^2 - 7x$

A partir de ella, puede verse que las gráficas se intersecan para $x = -1$ y que $h(x) > i(x)$ para $x > -1$.

Ahora bien, ¿cómo saber que no cambia la posición relativa de las funciones en el intervalo que parece ser solución a través de la inspección del gráfico? ¿Qué tipo de trabajo es necesario realizar para reafirmar -o no- la hipótesis anterior?

El desplazamiento a derecha e izquierda del área visible del gráfico para analizar el comportamiento de las funciones, ¿resulta un argumento suficiente? ¿Con qué argumentos algebraicos podría validarse la solución? ¿Qué relación hay entre unos y otros?

La resolución algebraica de la inecuación involucra la obtención de una segunda inecuación comparada con cero. Analizada desde el marco funcional, se trata de buscar el conjunto de positividad de una función que no es ninguna de las dos dadas en el problema.

Comprender la relación entre las dos funciones que componen la desigualdad y la función auxiliar que se factoriza no es evidente en ninguno de los dos marcos.

Desde el marco algebraico, la inecuación $h(x) > i(x)$ equivale a $h(x) - i(x) > 0$, es decir, que sus conjuntos solución son los mismos. Desde el marco funcional, el trabajo con los gráficos permite visualizar que esos conjuntos efectivamente coinciden.

Pero el trabajo apoyado en lo funcional podría pensarse sin necesidad de tener que apelar a la resolución algebraica de una inecuación como único medio de validación. Consiste en:

- validar que la intersección ocurre cuando $x = -1$,
- validar que $h(x) > i(x)$ cuando $x > -1$.

Claramente, la primera cuestión a resolver es la más simple, ya que sólo consiste en evaluar ambas funciones para $x = -1$ y ver que coincidan. Para la validación de la desigualdad, en un primer momento algunos estudiantes pueden conformarse con observar que, para algunos *x* mayores que -1, la evaluación en $h(x)$ da un resultado mayor que la evaluación en $i(x)$ Será necesario un trabajo particular sobre el corolario del teorema de Bolzano[4] para desarrollar la noción de que basta con una sola evaluación. Estamos ante una serie de cuestiones que pueden ser validadas pero no demostradas en la escuela media. Si bien la demostración del teorema de Bolzano excede los conocimientos escolares, esto no impide su uso; lo mismo sucede con el lema de Gauss.

Hemos propuesto un trabajo que se basa en pensar sobre las expresiones algebraicas, funciones e inecuaciones en un juego de marcos[5]. En este juego, se busca estudiar los modos en que diversas modificaciones o variaciones que puede sufrir una expresión algebraica impactan sobre el gráfico de la función que definen, intentando finalmente explicar estas modificaciones a partir del trabajo algebraico.

El soporte gráfico permite elaborar conjeturas, en tanto que el trabajo algebraico permite corroborar o desechar tales conjeturas, otorgando validez a las respuestas desde el mismo conocimiento matemático.

El ejemplo anterior muestra que las herramientas tecnológicas no solo se utilizan para realizar cálculos, sino que permiten a los alumnos realizar cambios de marcos y de registros de representación, enriqueciendo de esa manera sus conocimientos. Pero también implica una relación más que interesante entre lo que puede realizarse dentro del programa y la validación con lápiz y papel.

[4]El corolario al que nos referimos afirma que:
Sea f una función continua en $[a,b]$ con $f(a) = f(b) = 0$ y $f(x) \neq 0 \forall x \in (a,b)$.
Entonces $f(x) > 0 \forall x \in (a,b)$ ó $f(x) < 0 \forall x \in (a,b)$.

[5]Douady, R. (1984).

Más razones para incluir el uso de la tecnología en las clases de Matemática

La tecnología es parte de la Matemática y de la vida de los ciudadanos.

Desde hace ya varios años, las distintas tecnologías se han ido incorporando a los diferentes ámbitos de la vida cotidiana de los ciudadanos. Esta incorporación, la mayoría de las veces, modifica las prácticas sociales produciendo mejoras en la vida de las personas. Algunos ámbitos fueron pioneros en esa incorporación de tecnología, sobre todo aquellos en los en los que el uso de la tecnología mejora los resultados de las tareas a realizar. En ese sentido, el ámbito científico es paradigmático como creador de tecnología y, simultáneamente, su utilizador.

Como ejemplo de este hecho puede citarse el caso histórico del telescopio. Si bien este artefacto no fue inventado por los astrónomos más reconocidos de la época, tuvo grandes incidencias en la Revolución Científica en general y en el desarrollo de la Astronomía, en particular. Los filósofos naturales de la época, además de utilizar este artefacto tecnológico, lo estudiaron y perfeccionaron. Nadie podría negar que el uso de esta tecnología y su desarrollo modificó, en primer término, la Astronomía; posteriormente, el estudio de la naturaleza y promovió uno de los mayores cambios de la historia del mundo occidental.

Con no mucho esfuerzo podría trazarse un paralelismo entre el telescopio y la Astronomía, por un lado, y las computadoras y la Matemática, por el otro. Una vez que las computadoras entraron en el ámbito matemático académico, las tareas y el quehacer matemático no fueron los mismos. Las prácticas matemáticas se vieron modificadas, a la vez que los temas tratados por la disciplina se vieron enriquecidos: se hizo posible la resolución de problemas antes inabordables, se pudieron construir gráficos y figuras antes sólo imaginables, y manipular, a la vez, una cantidad de datos que nunca se había pensado. Inclusive, el propio estudio del funcionamiento de las computadoras y la intención de mejorarlas produjo nuevos problemas matemáticos. Este fenómeno comenzó en la segunda mitad del siglo XX y sigue hasta nuestros días.

Sin embargo, este cambio de las prácticas y tareas matemáticas no tuvo su correlato inmediato en las escuelas. Durante mucho tiempo, el acceso a la tecnología informática fue exclusivo de los ámbitos académicos. Mientras el quehacer y los saberes matemáticos académicos se transformaron y enriquecieron, los conocimientos y prácticas escolares permanecieron inmutables. Se fue creando así, con el paso del tiempo, una *Matemática escolar*[6] de fuerte tradición.

Con el transcurso de los años, las tecnologías informáticas fueron incorporándose a los distintos espacios laborales, hasta convertirse, en la actualidad, en integrantes casi imprescindibles de la mayoría de las prácticas sociales cotidianas. Uno de los últimos pasos en este recorrido hacia la masividad del acceso a las TIC fue su inclusión en las escuelas. El acceso a las tecnologías informáticas que puede tener actualmente un estudiante secundario no difiere mucho del que puede poseer un matemático. De esta manera, llegamos a un momento en el cual resulta tan necesario como posible tender nuevos puentes entre la Matemática escolar y la Matemática académica, entre el saber enseñado y el saber sabio.

Si bien con la masividad de la TIC tenemos la oportunidad de lograr que los conocimientos matemáticos escolares vuelvan a ser social y culturalmente relevantes, no podemos dejar de mencionar que, para poder lograr ese objetivo, se necesita de un gran compromiso y esfuerzo por parte de la comunidad educativa. La Matemática escolar tradicional, como toda práctica arraigada, ofrece resistencias a ser modificada. En algunas ocasiones, el uso de tecnología puede incorporarse sin conflictos, transformando levemente las tareas escolares habituales, como por ejemplo para hacer gráficos de funciones. Sin embargo, muchas veces es necesario generar verdaderas rupturas en el quehacer matemático escolar. Con el ingreso de las tecnologías informáticas, es posible abordar nuevos problemas matemáticos, con sus consecuentes nuevos conocimientos y saberes, y sus nuevas –y muchas veces, desconocidas– prácticas y tareas.

La posibilidad que tienen las computadoras de hacer cálculos.

No hay duda de que la mayor influencia de la tecnología sobre la enseñanza de la Matemática está vinculada con los cálculos. Aunque aún hoy la posibilidad del uso de calculadoras en las clases muchas veces sigue siendo discutida, creemos que es fundamental preguntarnos qué esperamos de los alumnos en cuanto a los cálculos en cada uno de los niveles de enseñanza.

Por ejemplo, si pensamos en la enseñanza de la proporcionalidad, es importante que los alumnos comprendan, entre otras cosas, las relaciones entre los valores de dos magnitudes que varían de manera proporcional, que conozcan la fórmula que los relaciona, que la puedan utilizar para estimar el valor de una conociendo el valor de la otra, que sepan cómo es el gráfico de la función y que puedan trabajar a partir

[6] Si bien siempre existe una *Matemática escolar*, esta tiene su correlato en la Matemática como ciencia. Y los cambios en la ciencia debieran producir –con tiempo y en la medida en que los conocimientos o tareas sean accesibles– cambios en la Matemática que se enseña.

del mismo para reconstruir la relación. Para todas estas tareas, la resolución de los cálculos no es central. De hecho, dejar de ocuparse de los cálculos permite, en casos como este, poner el foco de atención sobre las relaciones.

Tengamos en cuenta también la necesidad de hacer cálculos excede a la vida escolar. Las calculadoras forman parte de la vida de la mayoría de las personas y están disponibles en todos los teléfonos celulares, aunque no todos los usuarios saben cómo utilizarlas.

Es tarea de la escuela enseñar a usarlas de manera eficiente no solo para resolver cálculos, sino como herramienta para resolver problemas. Yves Chevallard sostiene que, además de facilitar el hacer Matemática, las computadoras posibilitan la "buena vida" de los ciudadanos (que llama "principio de la buena vida" (PBV)[7]:

> *Entonces, daré un ejemplo de vida buena que abordaremos teniendo en mente esta restricción. Si 3 cosas cuestan 13,80 francos, se dirá que 6 cosas, es decir, dos veces más cosas, cuestan dos veces más, o sea, 2 × 13,80 francos (o 13,80 francos × 2): ihe aquí la buena vida! Pero esta vida deja de ser buena -en cierto estado de infradifusión del saber matemático– si, en lugar de querer conocer el precio de 6 cosas, o de 9 cosas, o de 12 cosas, uno quisiera conocer el precio de 7 cosas, o de 11, o de 217... A menos que uno disponga de ese saber que es, digamos, la teoría de las fracciones. En efecto, esta última, a costa de una audaz pero rigurosa metáfora, permite restablecer las condiciones de la vida buena: entonces, si 3 cosas cuestan 13,80 francos, 11 cosas costarán 11/3 veces más, o sea 13,80 francos × 11/3: de este modo, estamos tratando la "fracción de enteros" a la manera de un número entero. Para salir adelante con todo eso, también tengo que saber calcular, desde luego, la expresión obtenida, saber aquí, por ejemplo, que 13,80 francos × 11/3 = (13,80 francos × 11) : 3. Si a eso agrego una calculadora, la vida se vuelve deliciosa: al ingresar la expresión del precio obtenida, (13,80 × 11) : 3, aparece directamente el precio por pagar: 50,60 francos.”*

En este sentido, saber resolver cálculos con la calculadora es tan importante como saber resolverlos “a mano”.

Porque las computadoras ayudan a la comprensión.

- Visualmente.

La tecnología ofrece miradas que resultaban imposibles en una práctica matemática que no disponía de imágenes o que requería de grandes esfuerzos para realizarlas.

Ahora es posible visualizar gráficas que eran difíciles de dibujar o imaginar, ampliando así las posibilidades de análisis. La tecnología brinda múltiples representaciones de objetos matemáticos y permite

[7] Chevallard, Y. (2013). *La matemática en la escuela: Por una revolución epistemológica y didáctica*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

relacionarlos dinámicamente, característica que puede tener una fuerte incidencia sobre la enseñanza y aprendizaje de las funciones, donde un elemento importante lo constituye la posibilidad de apoyarse en diferentes representaciones, y cambiar entre una y otra. Es decir, vehiculizan la interacción entre los diferentes marcos: numérico, algebraico, geométrico; y entre los diferentes registros de representación: gráfico, tabla de valores y simbólico.

Esto implica darle un estatuto nuevo al registro gráfico, como soporte del razonamiento y de la prueba más allá de su estatuto usual de representación.

Los programas ofrecen nuevas maneras de mostrar relaciones entre representaciones y transformarlas dinámicamente. Por ejemplo, al trabajar con lápiz y papel, un cambio en un parámetro en la fórmula de una función requiere de la construcción de una nueva gráfica. El mismo trabajo hecho con la computadora produce, casi instantáneamente, un nuevo gráfico –o muchos– permitiendo comprender la relación entre los cambios en la escritura algebraica y su relación con la representación gráfica.

La posibilidad de visualizar también tiene su uso en la enseñanza y aprendizaje de la Geometría. La aparición de una nueva Geometría, la Geometría dinámica, permite una nueva conceptualización de los objetos que analizaremos más adelante, junto a las propuestas de enseñanza.

En todos los casos, el uso de las imágenes debería hacerse desde una postura crítica, cuyo valor no reside en que sean imágenes, sino en lo que pueden aportar al aprendizaje.

- Brindando posibilidades de explorar.

En Matemática, la exploración es una actividad importantísima. Se trata de una práctica extensamente utilizada como medio para elaborar conjeturas, un modo de pasar de casos particulares a propiedades que pueden generalizarse. Sin embargo, la exploración realizada con lápiz y papel puede resultar costosa en términos de esfuerzo. La construcción de muchos casos de análisis no siempre es posible, lo cual la limita como herramienta. En cambio, la computadora permite trabajar rápidamente con muchos casos, lo que favorece la elaboración de conjeturas, que luego se podrán validar con lápiz y papel.

El punto de partida de la exploración es una mirada local, para llegar a una mirada general. Se trata de un punto de vista local porque muestra muchos casos particulares sobre los cuales analizar patrones, semejanzas, diferencias, coincidencias, que pueden llevar a la búsqueda de una generalización.

- Introduciendo una Matemática dinámica.

La tecnología permite dinamizar fenómenos y analizar su evolución, mientras que, sin tecnología, sólo podríamos obtener diferentes estados específicos estáticos de estos fenómenos.

La posibilidad de graficar familias de funciones o de dinamizar el recorrido de un punto sobre una curva, la construcción de figuras geométricas basándose en sus propiedades, son algunos de los resultados de pensar en una Matemática dinámica.

Este tipo de trabajo brinda a los alumnos retroacciones que tienen que interpretar en términos de las variaciones que han introducido. Este efecto de ida y vuelta entre las acciones efectuadas en un entorno tecnológico y el análisis de la información que se recibe sobre lo hecho brindan extensas posibilidades de aprender.

- Permitiendo trabajar con una gran cantidad de datos.

El trabajo escolar en Estadística, cuando no se dispone de computadoras, obliga al uso de muestras pequeñas, no solo por lo complejo que resulta manipular una gran cantidad de datos, sino por la dificultad que implica realizar tantos cálculos a mano o con una calculadora. Una de las razones de ser de la Estadística es el análisis con muestras grandes de datos. Es por eso que el trabajo con muestras pequeñas genera una Estadística escolar disociada de la práctica real, con la consecuente pérdida de sentido de su aprendizaje.

La computadora no solo permite trabajar con muestras de tamaño real, sino que también es posible acceder a bases de datos existentes.

La difícil tarea de integrar la tecnología

Sabemos que la integración no resulta simple, que hay resistencias a cambiar una forma de trabajo que se sostuvo durante mucho tiempo, en la que fuimos formados, con la que aprendimos y enseñamos.

La incorporación de la tecnología plantea dificultades a sortear. Sin embargo, creemos importante que, como docentes, seamos conscientes de cuáles son esas dificultades, para así poder elaborar estrategias que nos permitan lidiar con ellas.

El uso de tecnología nos plantea desafíos, como cualquier nueva situación que nos lleve a un terreno no del todo conocido. A decir de Nuray Çalışkan-Dedeoğlu, "cuando un nuevo elemento, como la tecnología, es introducido en el sistema, este se "perturba" y el docente debe tomar decisiones para lograr un nuevo equilibrio".[8]

La búsqueda de estrategias de enseñanza, el repensar la planificación, buscar nuevos problemas, probarlos, analizar qué sucedió con su puesta en aula, etc., constituyen elementos de búsqueda de equilibrio y de aprendizaje docente. Y este aprendizaje constante, aunque no siempre consciente, caracteriza esta actividad profesional.

Desafíos

A continuación platearemos algunos desafíos que implica esta integración.

- Distancia entre los conocimientos tecnológicos de los alumnos y docentes

Si bien hablamos de distancia entre los conocimientos de unos y otros, no se trata de los mismos conocimientos. Los alumnos hacen un uso de las computadoras que no suele estar vinculado con el estudio, aunque dominan una gran cantidad de herramientas y saben cómo manejarse con ellas. Esto, por un lado, libera al docente de tener que enseñar el uso básico de la computadora; pero por el otro, al ser tan diferentes los contextos de uso escolar y extra escolar, surge la necesidad de lograr un cambio en la relación de los alumnos con la computadora, de modo que se pueda transformar en una herramienta de aprendizaje y estudio.

Es claro que se trata de una tarea difícil, ya que involucra un cambio de mirada sobre un objeto tan cercano a los estudiantes. Por eso es importante que el cambio de relación con la computadora se transforme en un objeto de enseñanza. La idea es que los alumnos

[8] Nuray ÇALIŞKAN-DEDEOĞLU (2006). *Usages de la géométrie dynamique par des enseignants de collège. Des potentialités à la mise en oeuvre: quelles motivations, quelles pratiques?* UNIVERSITÉ PARIS 7 – DENIS DIDEROT. UFR de MATHÉMATIQUES

puedan distinguir qué tipos de actividades tecnológicas pueden realizarse en uno u otro ámbito.

- Gestión de las clases, del tiempo y de los registros

Las clases donde se emplean computadoras parecen llevar más tiempo que las que se desarrollan con lápiz y papel. Esto puede tener que ver con varias cuestiones, entre ellas, la falta de experiencia de los alumnos y docentes en su uso en el aula y la necesidad de trabajar no solo sobre contenidos matemáticos sino también sobre los informáticos. La organización de la clase no es la misma y requiere de una planificación diferente; los momentos colectivos no se gestionan de la misma manera que cuando se trabaja en las carpetas y es necesario repensar el tiempo que se dedica al registro de las conclusiones o institucionalizaciones.

Solo la experiencia ganada permitirá un mejor dominio del tiempo. Tal como señalamos antes, la profesión docente se caracteriza por el aprendizaje continuo de quienes la profesan, lo cual no será excepción para la integración de la tecnología.

- Rupturas

La introducción de la tecnología en las clases de Matemática trae consigo ciertas rupturas. Como dijimos anteriormente, se producen cambios tanto en la Matemática como ciencia como en la Matemática a enseñar, se generan cambios de prácticas, tanto matemáticas, como de enseñanza y de aprendizaje.

Es importante que, como docentes, seamos conscientes de cuáles son esas rupturas para así poder pensar en cómo abordarlas y de qué manera repensar la planificación.

Algunas de ellas son las siguientes.

- ¿Cuándo y cómo se usa GeoGebra? ¿Cómo se explora? ¿Cómo se registra?

¿Es necesario trabajar primero sobre el uso del programa o hacerlo cuando aparece alguna dificultad? Creemos que es tarea del docente, en función de los objetivos de enseñanza, decidir cuál es el momento adecuado para hacerlo. Sostenemos que no es necesario tener un amplio dominio del mismo antes de poder utilizarlo, sino que es posible ir aprendiendo a medida que se lo usa. Pensar en algunas actividades introductorias que tengan por objetivo la exploración de los menús de GeoGebra alcanza para que los alumnos estén preparados para iniciarse en su uso.

Hacer Matemática utilizando tecnología implica no solo saber cómo usarla, sino cuándo hacerlo. ¿Qué puede resolverse con GeoGebra y en qué casos es necesario trabajar con lápiz y papel? Como se trata de una pregunta que no admite una respuesta absoluta, sino que depende de varios factores, entre ellos el tipo de problema que se está intentando resolver y los conocimientos disponibles de los alumnos, se hace necesario ir configurando el espectro de cuáles son las condiciones que hacen que GeoGebra sea una buena herramienta de resolución. Esta configuración no es enseñable, por lo que el foco del trabajo docente estará puesto sobre aquellas explicitaciones sobre la toma de decisiones que favorezcan la reflexión. Es decir, sabemos que, por ejemplo, una situación que involucra la exploración resulta interesante para trabajar con del programa, por lo que luego de resolver una es importante señalar, en una instancia de reflexión colectiva, las ventajas de haberla pensado a partir de una herramienta tecnológica.

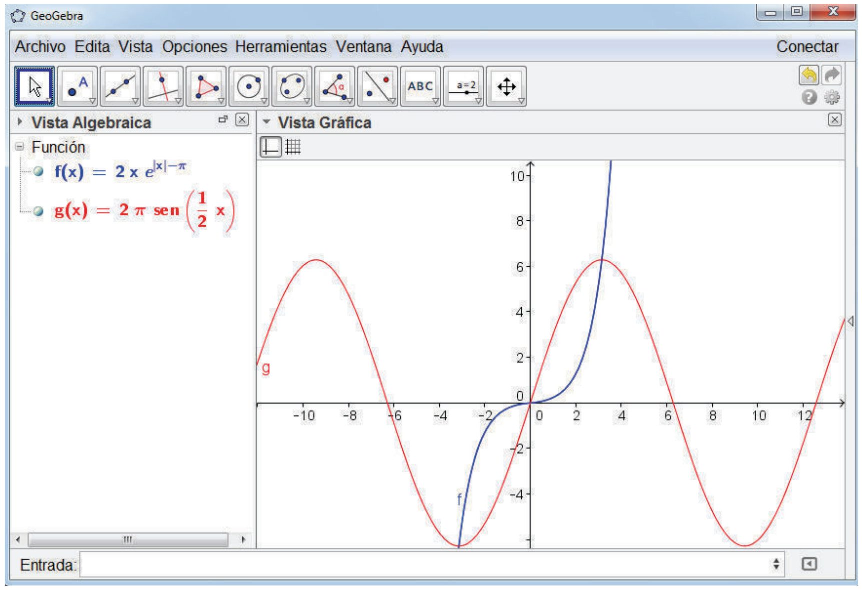
Una de las discusiones a plantear es si alcanza con lo que se visualiza en GeoGebra o si es necesario pasar al lápiz y papel para validar. Algunos de los problemas que mostraremos más adelante abonarán a esta discusión, en el sentido de que una de las cuestiones a trabajar en las clases consiste en decidir cuándo es necesario abandonar el programa, cuando lo que se ve no es suficiente para validar y requiere de un trabajo más vinculado a lo deductivo.

Otro punto a pensar es cómo dejar registro de aquello que se trabaja a partir del programa. Por ejemplo, es necesario decidir si las explicaciones, justificaciones y validaciones serán escritas en las carpetas, en un archivo de texto o en una ventana dentro de GeoGebra. Esto también lleva a pensar en la organización de los archivos que se generan: cómo nombrarlos y en qué carpetas resulta más conveniente guardarlos.

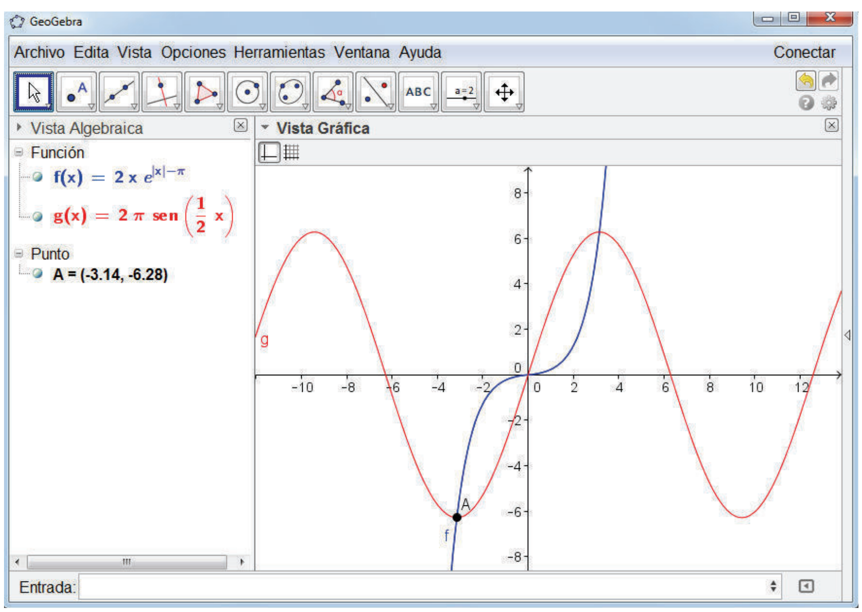
- La computadora permite resolver problemas imposibles de resolver con lápiz y papel,

Un ejemplo lo constituyen ecuaciones como $xe^{|x|-\pi} = \pi \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$, que no puede resolverse a mano, pero sí, a partir de la interpretación de que se están buscando los puntos de intersección entre las gráficas de las funciones $f(x) = xe^{|x|-\pi}$ y $\mathrm{g(x)} = \pi \sin\left(\frac{1}{2}\mathrm{x}\right)$. Este cambio de mirada requiere pasar de un marco algebraico a un marco funcional.

Al graficar ambas funciones en un mismo sistema de coordenadas, se obtiene lo siguiente:



Buscando la intersección entre las gráficas, se obtiene una solución de la ecuación, simbolizada con el punto A.



Surgen dos cuestiones a discutir. Por un lado, cuál de las coordenadas del punto A representa la solución de la ecuación y cuál es efectivamente esa solución; y, por el otro, la cantidad de soluciones que tiene la ecuación.

Desde el punto de vista del docente, se amplían las posibilidades y se eliminan restricciones a la hora de plantear problemas, mientras que, para el alumno, se trata de trabajar sobre cuándo conviene o es posible resolver a mano y cuándo apelar a una computadora. Se agrega también la interpretación de la información que el programa brinda. ¿Cómo saber si las soluciones que se ven son las únicas que hay? ¿O si son exactas o aproximaciones? GeoGebra trabaja con una cantidad limitada de cifras decimales, por lo que los resultados que brinda son aproximados –del mismo modo que los resultados que brindan la mayoría de calculadoras–. Esto requiere decidir en qué casos son aceptados sin más trabajo y en cuáles, no. En este ejemplo, una sospecha es que la solución es $x = -\pi$, lo cual puede saberse reemplazando este valor en la ecuación o en cada una de las funciones.

- La necesidad de realizar operaciones algebraicas o no.

Si se quiere analizar el crecimiento de la función $f(x) = \dfrac{x+1}{e^x}$, una estrategia consiste en analizar el signo de su derivada. Ahora bien, en un programa como GeoGebra alcanza con ingresar $f'(x) = \dfrac{1 \cdot e^x - (x+1)e^x}{\left(e^x\right)^2}$, mientras que la misma tarea resuelta con lápiz y papel necesita de la realización de manipulaciones algebraicas:

$$f'(x) = \frac{1 \cdot e^x - (x+1)e^x}{\left(e^x\right)^2} = \frac{e^x(1-x-1)}{\left(e^x\right)^2} = \frac{-x}{e^x}.$$

Se trata, entonces, de decidir dónde se quiere o necesita poner el foco del trabajo, si es sobre darse cuenta de que es necesario analizar el signo de la derivada o sobre cómo hacer para analizarlo.

En el caso del trabajo a mano, resulta necesario operar para obtener una expresión de la cual pueda leerse el signo de la derivada. En este caso, sabiendo que $e^x > 0$ para cualquier valor de x, el signo de la derivada coincidirá con el signo del numerador. Este análisis no estará presente al usar GeoGebra, aunque el foco estará puesto sobre la derivada como función y vinculando su conjunto de positividad como el conjunto de valores para los que la función *f* es creciente.

- Las similitudes y diferencias entre una Geometría estática y una Geometría dinámica.

GeoGebra trabaja a partir de conocimientos matemáticos y permite realizar construcciones basadas en propiedades geométricas. Sin embargo, si la figura no es construida según sus propiedades, ella no resistirá el arrastre, deformándose. Las propiedades y relaciones que eran observables no se conservarán.

La Geometría dinámica introduce un nuevo objeto para que los alumnos manipulen, una representación en la cual las propiedades geométricas de la figura pueden ser leídas como las que se conservan a través de desplazamientos, y las construcciones pueden ser validadas como aquellas que conservan las propiedades pedidas a través de desplazamientos. Los desplazamientos o arrastres se constituyen en una herramienta que no existe en el trabajo a mano, que permite saber si la construcción realizada fue hecha o no a partir de las propiedades de las figuras. En ese sentido, la construcción dejará de ser válida si, al ser desplazada, pierde sus características.

Por eso, otra de las potencialidades de los programas de Geometría dinámica es que favorecen, en los alumnos, la distinción entre dibujo y figura. En ese sentido, la figura es considerada como un referente teórico, mientras que el dibujo es una representación gráfica de la figura. Dada una clase de figuras, por ejemplo los paralelogramos, se trata de analizar qué propiedades corresponden a esa clase y cuáles son agregadas por el observador al mirar un dibujo particular, por ejemplo, un paralelogramo que casualmente también es rombo. La función de arrastre resulta una herramienta destacada para trabajar sobre esta distinción.

Propuestas de enseñanza

Las siguientes propuestas de enseñanza constituyen herramientas para trabajar en clase. Si bien cada una de ellas está secuenciada, no constituyen la totalidad del trabajo a realizar para cada uno de los contenidos propuestos. Tampoco son consecutivas, sino que requieren de más trabajo entre una y otra.

Creemos que su uso puede ser provechoso tanto para los aprendizajes de los alumnos, como para los de los docentes. Iniciarse en el uso de tecnología requiere primero de animarse a hacerlo, tanto para unos como para otros. Y en ese animarse, los docentes tendrán la posibilidad de analizar cómo gestionar cada una de las propuestas, qué funcionó y qué no, qué es necesario modificar en una nueva instancia de puesta en aula, tendrán la posibilidad de recabar estrategias que los alumnos pongan en juego, lo que les permitirá ir engrosando sus conocimientos, que luego podrán utilizar para anticipar respuestas de los alumnos, etc.

En cada una de las secuencias que proponemos, nos centraremos en la resolución y discusión de un conjunto de problemas. Estamos imaginando alumnos que trabajan al menos en parejas, de modo de favorecer la discusión sobre las estrategias de resolución. Durante el trabajo de los alumnos, el docente podrá recorrer el aula tomando nota de las diferentes formas de resolver que van surgiendo, con el objetivo de decidir cuáles retomar en una instancia colectiva y en qué orden. Por ejemplo, no suele ser buena idea que la solución más adaptada al problema sea la primera que se discuta, ya que puede inhibir que otros alumnos propongan estrategias menos expertas.

Secuencia 1. Geometría

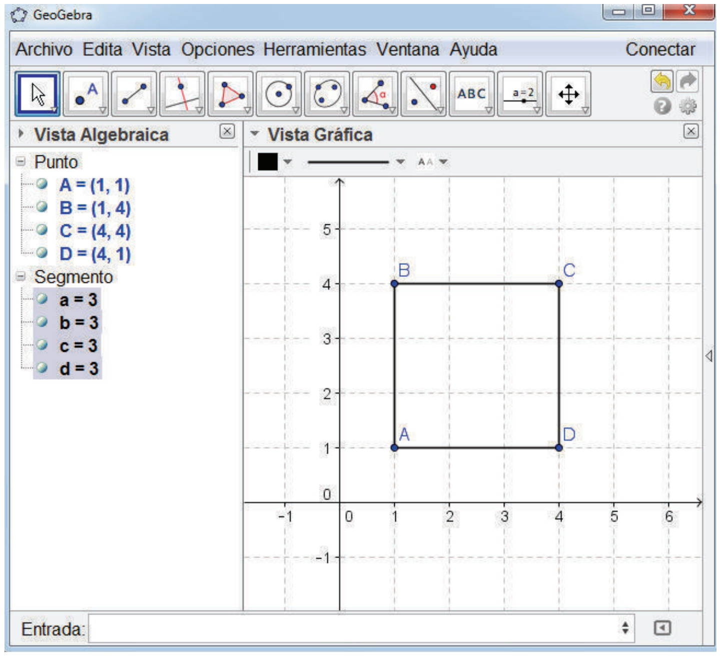
El trabajo sobre el que se basa la secuencia que presentaremos a continuación está vinculado con el aprendizaje de la Geometría a partir del uso de GeoGebra. Esto hace que la Geometría a trabajar sea dinámica en lugar de estática.

¿Qué es la Geometría dinámica?

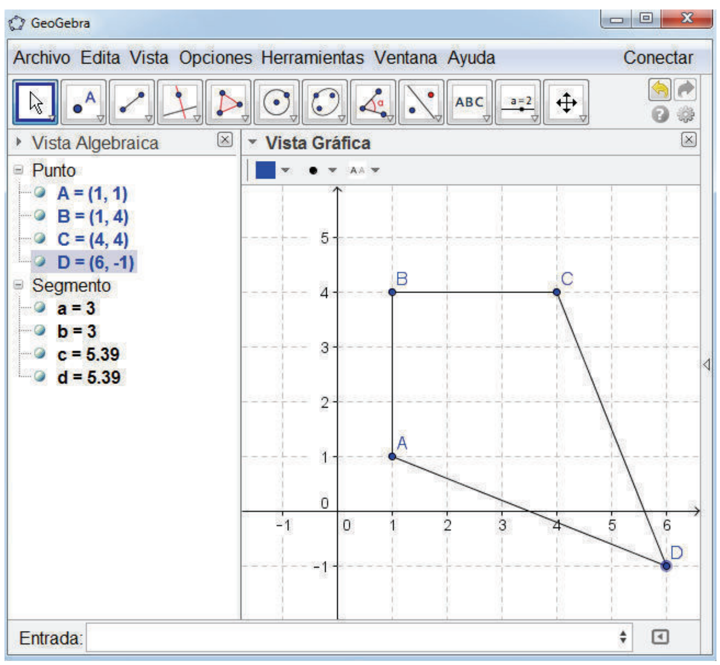
La Geometría dinámica se define como un ambiente computacional de construcción geométrica basado en la geometría euclidiana.

Una de sus potencialidades es que favorece, en los alumnos, la distinción entre dibujo y figura. En ese sentido, tal como se ha señalado anteriormente, la figura es considerada como un referente teórico, mientras que el dibujo es un representante particular de la figura. Se trata de analizar qué propiedades corresponden a una clase de figuras y cuáles se agregan en un dibujo. Por ejemplo, cuando nos referimos a la figura *paralelogramo*, nos referimos a un cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos. En cambio, si disponemos de un paralelogramo cuyos lados consecutivos miden 4 cm y 8 cm, podremos decir que un lado mide el doble del otro, propiedad que tiene este dibujo en particular y no, los paralelogramos en general.

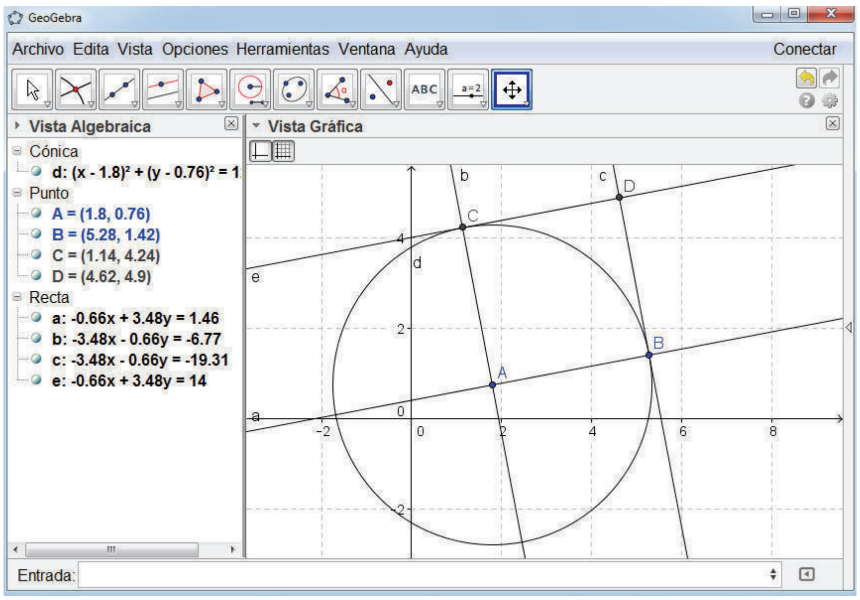
Cuando se realiza una construcción sin tener en cuenta sus propiedades geométricas, el dibujo no resistirá el arrastre y se deformará. Las propiedades y relaciones que eran observables no se conservarán. Por ejemplo, puede construirse un cuadrado controlando los ángulos rectos y las medidas de los lados utilizando la cuadrícula:



Pero al aplicar un arrastre a alguno de los vértices, podrá verse que el dibujo deja de ser un cuadrado. Esto se debe a que, en la construcción original, no se construyeron los lados como segmentos o rectas perpendiculares.



Una manera de construir un cuadrado[9] consiste en marcar dos puntos cualesquiera A y B y una recta que pase por ellos. Con la herramienta Recta perpendicular es posible trazar perpendiculares a $\overline{AB}$ que pasen por A y B, respectivamente. Para asegurarse de que los lados tengan la misma medida que $\overline{AB}$, puede construirse una circunferencia de centro A y radio $\overline{AB}$, cuya intersección con la perpendicular trazada anteriormente es C. Finalmente, al dibujar una paralela a $\overline{AB}$ por C se obtiene el cuarto vértice del cuadrado.



Al aplicar la función Arrastre, puede comprobarse que ABCD sigue siendo un cuadrado.

Señala Ángela Restrepo[10],

> *El trabajo en geometría dinámica introduce entonces un nuevo objeto para que los alumnos manipulen, una representación en la cual las propiedades geométricas de la figura pueden ser leídas como las que se conservan a través de desplazamientos, y las construcciones pueden ser validadas como aquellas que conservan las propiedades pedidas a través de desplazamientos.*

[9] Ciertamente, no es la única manera de hacerlo. De hecho, GeoGebra tiene una función que permite dibujar polígonos regulares. En este caso nos pareció interesante no apelar a esa función, ya que el trabajo necesario obliga a desplegar el uso de las propiedades de los cuadrados.

[10] Restrepo, Angela. (2008). *Genese Instrumentale du Deplacement en Geometrie Dynamique chez des Eleves de 6eme*. Université Joseph Fourier. Francia.

El desplazamiento o arrastre constituye un elemento esencial de la Geometría dinámica que nos permite pasar de una Geometría estática, en la que los objetos sobre los que se trabaja son dibujos en configuraciones particulares, a una Geometría dinámica en la que las construcciones conservan las propiedades geométricas a través del movimiento. Posibilita, entre otras cuestiones, observar propiedades geométricas, relaciones entre objetos, validar o no las construcciones. Es una de las funcionalidades más importantes que poseen los programas de Geometría dinámica, y no está disponible al trabajar con lápiz y papel.

El alumno obtiene retroacciones sobre su trabajo a través del arrastre de su dibujo por medio de una manipulación directa. Y, en el caso de que su construcción no resista el arrastre (se deforme), el alumno es llevado a buscar otras estrategias.

Al trabajar con lápiz y papel, una tarea puede ser resuelta sin apelar a propiedades geométricas, con los alumnos situados en el plano del dibujo. Con GeoGebra, los alumnos no están haciendo un dibujo, sino comunicando su procedimiento de construcción a un programa.

Nuestro objetivo consiste en poner en discusión las propiedades aparentes de un dibujo, es decir, las que son percibidas con la vista, versus la conservación de las propiedades geométricas de una figura cuando es desplazada. Las investigaciones dan cuenta de las dificultades de apropiación del desplazamiento, tanto para alumnos como para docentes. Sobre esto, agrega Ángela Restrepo[11]:

> *Para los alumnos, comprender e interpretar los efectos obtenidos a través de un desplazamiento constituye una verdadera dificultad. Por un lado, no analizan necesariamente los fenómenos observados desde un punto de vista matemático, como lo haría un docente. Ellos pueden decir simplemente que “se movió” o que “sube o baja”, “se agranda o se aplasta”. Por otro lado, los efectos del desplazamiento sobre las propiedades geométricas de la figura no son siempre percibidos ni comprendidos por los alumnos. Pueden ser ignorados por los alumnos que se concentran sobre poder mover o no la figura, y eso independientemente de los efectos sobre la figura.*
> *Del lado de los docentes, la integración de la geometría dinámica no va de suyo, más allá del tiempo que tiene la geometría dinámica. (...)*
> *Desde la aparición de la geometría dinámica y en diferentes investigaciones, una afirmación general es que la utilización del desplazamiento no es fácil, y ni siquiera evidente ni transparente. Tiene que ser introducido de manera explícita y organizado por el docente (Strässer, 1992).*

[11] Restrepo, Angela. (2008). Op. cit.

El uso del arrastre o desplazamiento, a pesar de su aspecto natural y simple, plantea una ruptura en el trabajo geométrico. Tal como hemos señalado, obliga a los alumnos a poner en juego propiedades de los objetos geométricos que no siempre son necesarias cuando se trabaja con lápiz y papel. Entonces, ser conscientes de esa ruptura implica poner en discusión las diferentes formas de trabajo matemático, debatir sobre ellas, proponer realizar arrastres de las figuras, analizar sus efectos, intentar explicar por qué se deformó un dibujo o no, etc. Este trabajo de discusión parte de una decisión explícita del docente, sin esperar que surja de los alumnos.

Creemos que la necesidad de utilizar el desplazamiento no debe esperarse que provenga solamente del usuario, sino que debe ser demandada y necesaria para la situación que se plantea. Esto lleva a replantearse qué condiciones tendría que reunir un problema para poder ser resuelto de manera provechosa en GeoGebra.

Si bien no vamos a desarrollar aquí un listado, creemos que una condición fundamental es que las situaciones no pueden ser iguales a las que se resuelven con lápiz y papel, que limitan el uso del arrastre. Se trata de usar el arrastre no como un medio de constatación, sino para elaborar conjeturas o para realizar una construcción y validar la estrategia utilizada.

Objetivos de la secuencia

- Iniciar a los alumnos en el uso de GeoGebra.
- Reconocer la función de Arrastre como un medio de control y validación de construcciones de figuras a partir de propiedades geométricas.
- Debatir acerca de la actividad de copiado. Decidir cómo conviene realizar los copiados y cómo registrar el proceso.
- Iniciar a los alumnos en actividades de exploración y validación.

Contenidos

- Introducción a algunas funciones de GeoGebra.
- Introducción a la Geometría dinámica: el arrastre y la necesidad del uso de propiedades para realizar construcciones sin que se deforme la figura.
- El copiado como actividad geométrica. Cómo realizar un copiado. La toma de decisiones asociada a un copiado: decidir por dónde

empezar, analizar relaciones entre los objetos a copiar, cómo validar una copia.

- Análisis de problemas: cómo explorar, cómo validar, problemas con infinitas soluciones o ninguna. Validaciones geométricas y algebraicas. ¿Qué aporta cada una al análisis de la situación?

Relación con los NAP

La secuencia que presentaremos está pensada para ser utilizada en diferentes años, según los conocimientos disponibles en los alumnos.

A continuación mostramos los contenidos de los NAP con los que se relaciona.

7.° año – 1.° año

- El reconocimiento de figuras y cuerpos geométricos y la producción y el análisis de construcciones explicitando las propiedades involucradas en situaciones problemáticas que requieran:
    - analizar figuras (triángulos, cuadriláteros y círculos) y cuerpos (prismas, pirámides, cilindros, conos y esferas) para caracterizarlas y clasificarlas,
    - explorar y argumentar acerca del conjunto de condiciones (sobre lados, ángulos, diagonales y radios) que permiten construir una figura (triángulos, cuadriláteros y figuras circulares),
    - construir figuras a partir de diferentes informaciones (propiedades y medidas) utilizando compás, regla, transportador y escuadra, explicitando los procedimientos empleados y evaluando la adecuación de la figura obtenida,
    - analizar afirmaciones y producir argumentos que permitan validar las propiedades: triangular y de la suma de los ángulos interiores de triángulos y cuadriláteros.

1.° año – 2.° año

- El análisis y construcción de figuras, argumentando en base a propiedades, en situaciones problemáticas que requieran:
    - determinar puntos que cumplan condiciones referidas a distancias y construir circunferencias, círculos, mediatrices y bisectrices como lugares geométricos,

- explorar diferentes construcciones de triángulos y argumentar sobre condiciones necesarias y suficientes para su congruencia,

- construir polígonos utilizando regla no graduada y compás a partir de diferentes informaciones, y justificar los procedimientos utilizados en base a los datos y/o a las propiedades de las figuras,

- formular conjeturas sobre las relaciones entre distintos tipos de ángulos a partir de las propiedades del paralelogramo y producir argumentos que permitan validarlas (opuestos por el vértice, adyacentes y los determinados por dos rectas paralelas cortadas por una transversal),

- analizar afirmaciones acerca de propiedades de las figuras y argumentar sobre su validez, reconociendo los límites de las pruebas empíricas,

- analizar las relaciones entre lados de triángulos cuyas medidas sean ternas pitagóricas e interpretar algunas demostraciones del teorema de Pitágoras basadas en equivalencia de áreas.

2.° año – 3.° año

- El análisis y construcción de figuras, argumentando en base a propiedades, en situaciones problemáticas que requieran:

  - usar la noción de lugar geométrico para justificar construcciones (rectas paralelas y perpendiculares con regla y compás, circunferencia que pasa por tres puntos, entre otras),

  - construir figuras semejantes a partir de diferentes informaciones e identificar las condiciones necesarias y suficientes de semejanza entre triángulos,

  - interpretar las condiciones de aplicación del teorema de Thales e indagar y validar propiedades asociadas,

  - usar la proporcionalidad entre segmentos que son lados en triángulos rectángulos, caracterizando las relaciones trigonométricas seno, coseno y tangente,

  - formular conjeturas sobre propiedades de las figuras (en relación con ángulos interiores, bisectrices, diagonales, entre otras) y producir argumentos que permitan validarlas,

- extender el uso de la relación pitagórica para cualquier triángulo rectángulo.

3.° año – 4.° año

- La exploración y la formulación de conjeturas acerca de figuras inscriptas en una circunferencia construidas con recursos tecnológicos, y su validación mediante las propiedades de los objetos geométricos.

Desarrollo de la secuencia

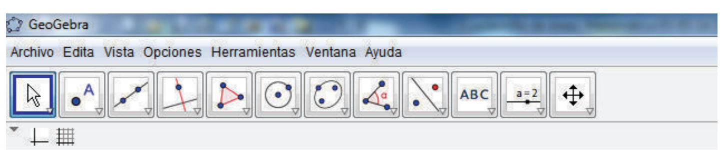
Los primeros tres problemas abordan la problemática del desplazamiento en Geometría dinámica.

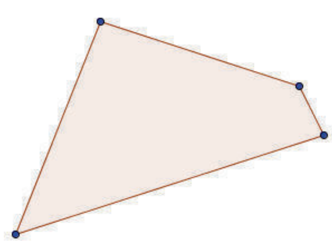
Actividad 1

Dibujen un cuadrilátero. ¿Qué sucede si mueven uno de sus lados? ¿Y si mueven uno de sus vértices? ¿Qué se modifica y qué no? ¿Por qué creen que ocurre eso?

Esta primera actividad no requiere de conocimientos previos sobre GeoGebra, sino que está planteada para permitir una exploración de las funciones del programa puestas en juego para dibujar un cuadrilátero. Estamos pensando en instancias colectivas en las cuales se pongan en común cuestiones relativas al uso del programa.

El objetivo de esta situación consiste en ver que un cuadrilátero cualquiera puede trazarse a partir de unir 4 vértices y sin ninguna relación particular entre ellos. En principio, el pedido de moverlo puede interpretarse como un análisis de las condiciones necesarias para que la figura siga siendo un cuadrilátero, como por ejemplo, que al moverla no se hagan coincidir dos vértices o que no haya tres alineados.





¿Qué cuestiones es importante que queden registradas?

Ciertamente dependerá de los conocimientos de los alumnos, pero algunas que creemos importantes son:

- Para dibujar un cuadrilátero cualquiera pueden marcarse cuatro puntos y unirlos con segmentos o usar la herramienta Polígono.
- Si se mueve un lado, este no cambia de medida aunque sí cambian las medidas de los demás.
- Si se mueve un vértice, van cambiando las medidas de los lados.
- Hay posiciones que hacen que la figura deje de ser un cuadrilátero, como por ejemplo, si se hacen coincidir dos vértices o si hay tres alineados.

Los dos problemas que siguen permiten profundizar la idea del arrastre y sus usos en las construcciones. Proponemos plantearlos juntos para su resolución, para luego hacer un intercambio colectivo.

Actividad 2

Dibujen un rectángulo. Si mueven alguno de sus elementos, ¿sigue siendo rectángulo? En el caso de que deje de serlo, dibujen ahora otro rectángulo de manera tal que, al mover cualquiera de sus elementos, siga siendo un rectángulo.

Actividad 3

Dibujen un paralelogramo de manera tal que, al mover cualquiera de sus elementos, siga siendo un paralelogramo.

La instancia colectiva puede basarse en las siguientes preguntas:

- En los casos en que la figura dejó de ser rectángulo/paralelogramo, ¿por qué creen que fue?
- En los casos en que la figura no dejó de ser rectángulo/paralelogramo, ¿por qué creen que fue?
- ¿Cómo pueden hacerse las construcciones de modo que no deje de ser la figura que se quiere?

Es posible que algunos alumnos necesiten volver a interactuar con las construcciones para responder las preguntas. Se trata de poner en juego la percepción versus la construcción basada en propiedades. Es decir, el rectángulo dejará de serlo si, por ejemplo, la perpendicularidad fue lograda visualmente o mediante el uso de la cuadrícula, al igual que las medidas de los lados. En cualquiera de las dos figuras, resulta necesario que las propiedades que las definen hayan sido tenidas en cuenta no solo a partir de la percepción, sino por el uso de algún comando de GeoGebra que las asegure.

Surgen entonces las primeras cuestiones importantes a destacar referidas al uso de GeoGebra y las construcciones:

Las propiedades geométricas de una figura tienen que conservarse a través de desplazamientos.

Para lograr que un rectángulo siga siéndolo al mover sus vértices o lados es necesario que se haya construido a partir de herramientas que aseguren sus propiedades (lados consecutivos perpendiculares o lados opuestos paralelos y un ángulo recto).

A continuación proponemos la resolución de la actividad 4. Si hay varios alumnos que utilizan el comando que dibuja ángulos de una medida dada, pediremos que vuelvan a hacer la construcción sin usarlo.

Se trata de un problema que admite muchas estrategias diferentes de resolución, que pueden quedar ocultas si se permite el uso del comando citado anteriormente.

Actividad 4

Construyan un triángulo isósceles que tenga dos de sus ángulos de 45°.

Este problema constituye un ejemplo interesante de las estrategias que pueden surgir al no permitir el uso de ciertos comandos. Esta restricción oficia de variable didáctica, ya que obliga a poner en juego otros conocimientos y, por lo tanto, otras formas de resolución.

¿De qué modo aportan las construcciones a la elaboración del conocimiento geométrico?

El modo de pensar geométrico supone poder apoyarse en propiedades estudiadas de las figuras y de los cuerpos, para poder encontrar relaciones no conocidas. También se pone en juego para poder saber que un resultado es el correcto, porque las propiedades utilizadas así lo garantizan. El modo de demostrar la validez de una afirmación en Geometría no es empírico (midiendo o dibujando), sino racional, a partir de argumentos.

La actividad de copiado permite enfrentar a los alumnos con el análisis de las propiedades de las figuras. Para ello, es necesario tomar en cuenta sus elementos, las medidas, seleccionar las herramientas más convenientes a utilizar, etc.

Si bien el copiado no exige explicitar las propiedades utilizadas para hacerlo, la herramienta de arrastre hace que, en caso de que la figura se deforme, haya que revisar qué propiedades se perdieron. La construcción misma supone que quien la está realizando tenga que explicitar cada uno de los pasos a realizar, en orden y sin saltearse ninguno.

Creemos importante generar instancias de trabajo colectivo de comunicación de procedimientos de construcción. De esa manera, los alumnos podrán compartir sus producciones, que deberán tener disponibles, y compararlas. Teniendo en cuenta que una vez hecha la construcción solo se dispone del producto final (un rectángulo, por ejemplo), la necesidad de comparar estrategias viene acompañada de la de registrar cómo se resolvió. Este registro puede hacerse en la carpeta, en un archivo de texto o en GeoGebra.

Maria Alessandra Mariotti[12] afirma: "...a primera vista, la escritura puede simplemente ser considerada como una manera de mejorar la expresión oral: lo que se dice puede ser registrado. Una vez escrito puede ser leído, y al hacerlo, puede ser "dicho" una y otra vez, cuando se lo necesite. Pero, como es sabido, considerar la escritura solo como una simulación de la expresión oral sería limitado y engañoso; la escritura transformó la forma de pensar"

> *"...la escritura marca la diferencia: no solo en la expresión del pensamiento, pero también y sobre todo en cómo ese pensamiento es pensado" J. Goody, (1989) p. 266."*

[12] Mariotti, Maria Alessandra (2002). *Influence of technologies advances on students' Math learning*. En English L., Bartolini Bussi M. G., Jones G., Lesh R., & Tirosh D. (eds.). *Handbook of International Research in Mathematics Education*, Lawrence Erbaum Associates.

La validación de la construcción estará dada, por un lado, porque se mantenga la figura a través de desplazamientos. Por el otro, podrá explicarse a través del relato de la construcción realizada y las propiedades puestas en juego.

Posibles estrategias de resolución

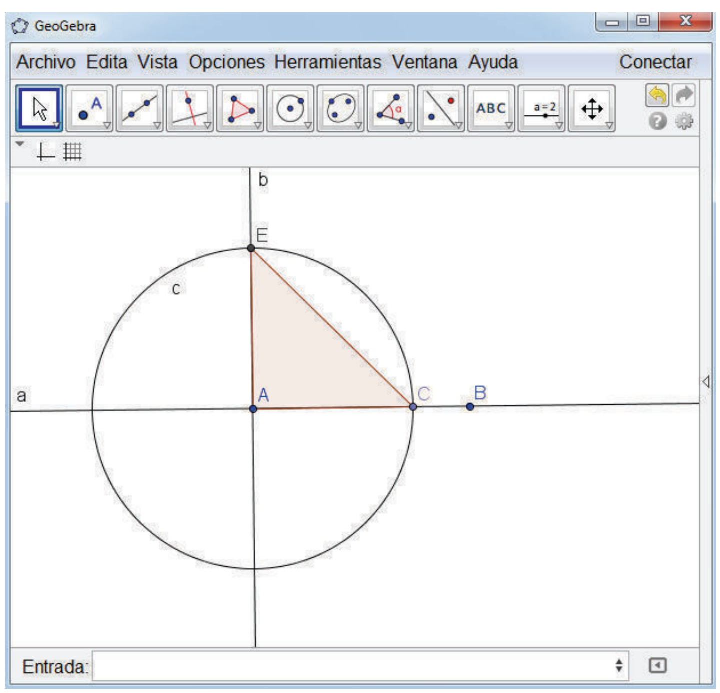
Algunas posibles construcciones son las siguientes.

- Partir de que un triángulo rectángulo isósceles tiene sus dos ángulos agudos de 45°.

La construcción, en este caso, se hizo a partir de graficar dos rectas perpendiculares y una circunferencia de centro el punto de intersección entre ellas. Dos de los puntos de intersección de las rectas con la circunferencia fueron tomados como vértices del triángulo, asegurándonos así de que los catetos tienen la misma medida –por ser radios de la misma circunferencia-.

Puede resultar interesante analizar con los alumnos que no cualquier punto elegido determina un triángulo (E y D, por ejemplo).

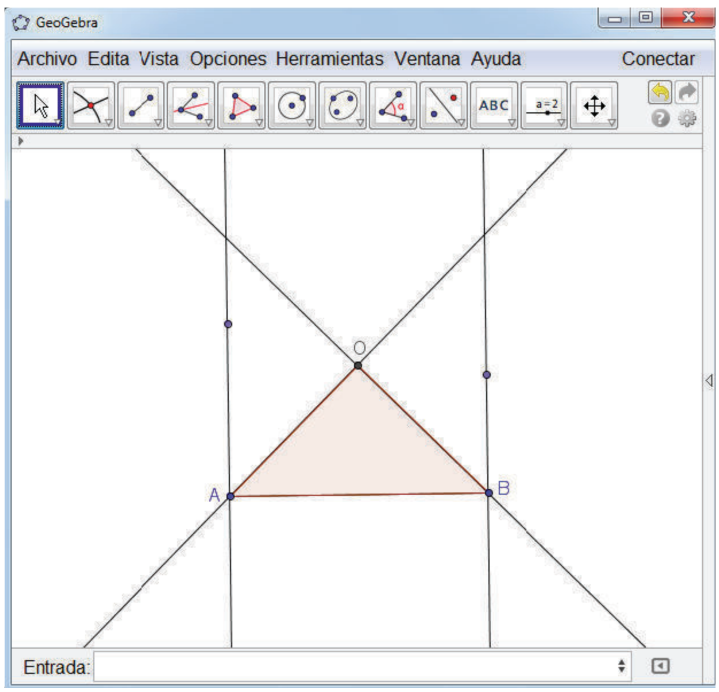
La comunicación de las estrategias obliga a los alumnos a utilizar cierto lenguaje específico con precisión (por ejemplo, no alcanza con decir "dibujo una perpendicular", sino que hay que indicar perpendicular a qué y por qué punto la graficaron). De esta manera, se transforma en un recurso útil y necesario para poder comprenderse.



- Graficar las bisectrices de dos ángulos rectos.

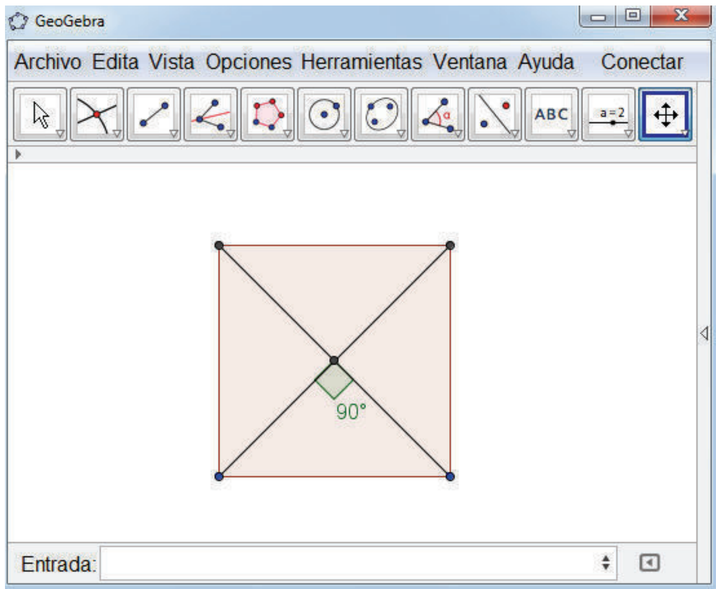
Se traza un segmento cualquiera AB y dos rectas perpendiculares a él por cada uno de sus extremos. Se grafican las bisectrices de los dos ángulos rectos, que se cortan en el punto O. El triángulo AOB tiene dos ángulos de 45º, por lo que resulta isósceles.

Es interesante analizar con los alumnos que en esta estrategia de resolución no fue necesario usar que el triángulo es rectángulo, aunque puede explicarse fácilmente por qué necesariamente tiene que tener un ángulo recto.



- Trazar las diagonales de un cuadrado, que se cortan perpendicularmente y son además bisectrices de los ángulos rectos.

Se trata de una propiedad de las diagonales de los cuadrados, que en caso de estar disponible puede utilizarse.



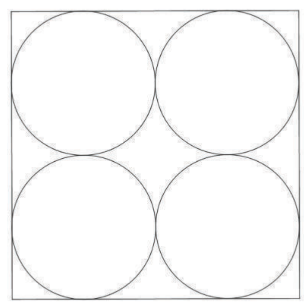
¿Cómo saber si la construcción es correcta?

No es mirando, observando, sino que será necesario poner en juego propiedades. La validación de la construcción requiere salir del programa y poder elaborar una explicación, lo cual aporta a construir la idea de en qué consiste una validación desde esta perspectiva.

La discusión acerca de las distintas estrategias de construcción permite explicitar las propiedades que se tienen en cuenta en cada caso –y las que no-. Imaginamos un espacio donde cada grupo de alumnos cuente cómo realizó la construcción explicando las propiedades que pusieron en juego y explicando por qué creen que obtienen la figura pedida.

Actividad 5

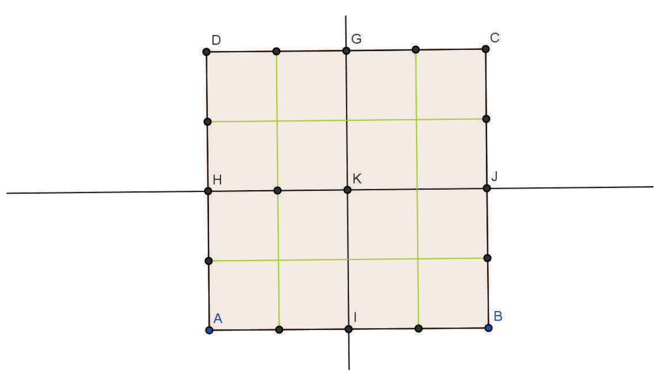
Reproducí la siguiente figura formada por un cuadrado y cuatro circunferencias iguales:

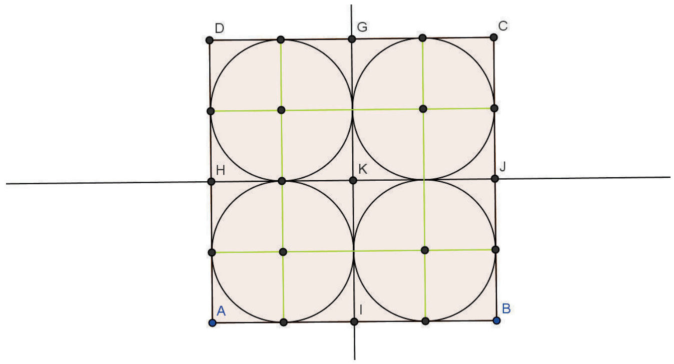


Una cuestión a discutir es por qué no damos medidas en una figura a copiar. Si bien es posible tomar medidas y reproducirlas, queremos centrarnos en las relaciones entre los objetos que la componen, y que esas relaciones se mantengan en la copia, sin que se deforme al ampliarla.

En un trabajo de copiado, resulta interesante discutir por dónde conviene comenzar a hacer la copia. No es un tema menor, porque los conocimientos matemáticos necesarios para la resolución dependerán de la decisión del orden en que se realice.

Una posibilidad es iniciar el copiado a través del cuadrado, lo cual requerirá determinar el centro y radio de cada una de las circunferencias. Esto puede hacerse trazando mediatrices (o determinando los puntos medios) de sus lados y de cada segmento mitad que queda determinado:

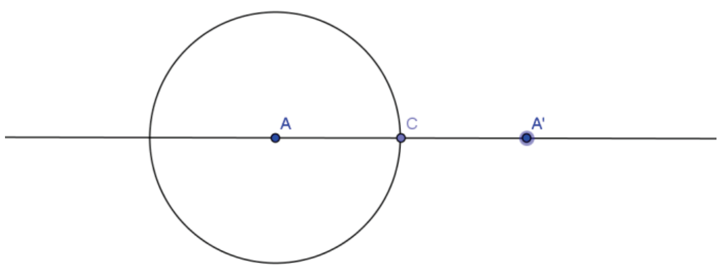




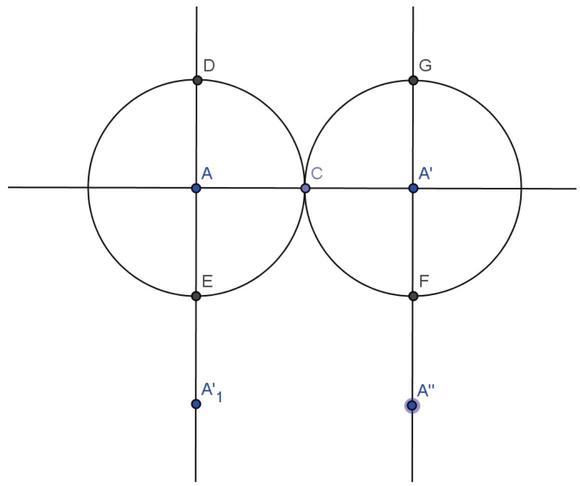
El copiado también puede hacerse a partir de las circunferencias, de la manera que indicamos a continuación.

Dibujar una recta que pasa por A y graficar una circunferencia de centro A y un radio cualquiera. Marcar el punto C de intersección de la circunferencia con la recta que pasa por A. Dibujar el punto A' como el simétrico de A respecto de C.

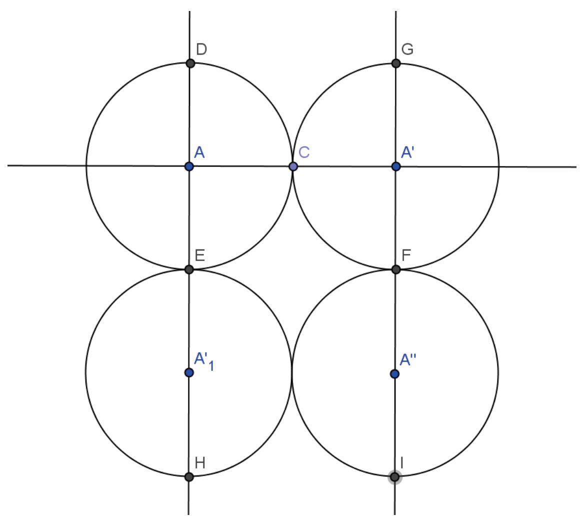
Graficar la circunferencia de centro A' y radio A'C.



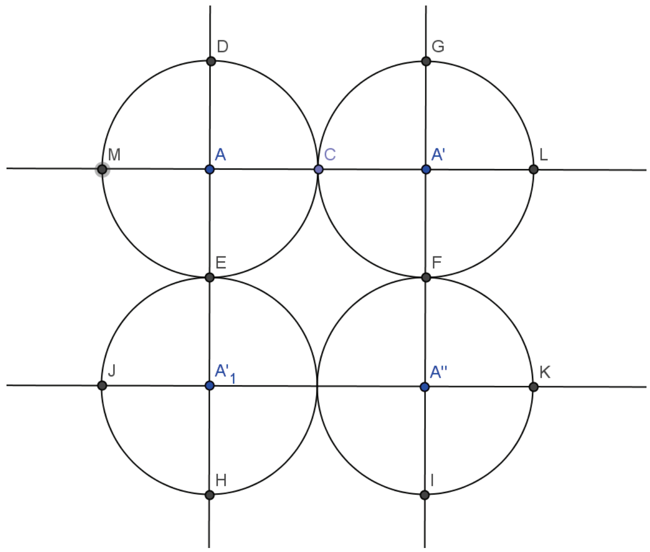
Trazar dos rectas perpendiculares a AA’, una que pase por A y otra por A’. Hallar los puntos de intersección de las circunferencias con las perpendiculares dibujadas y buscar los simétricos de A respecto de E, A'_1, y de A’ respecto de F, A’’.



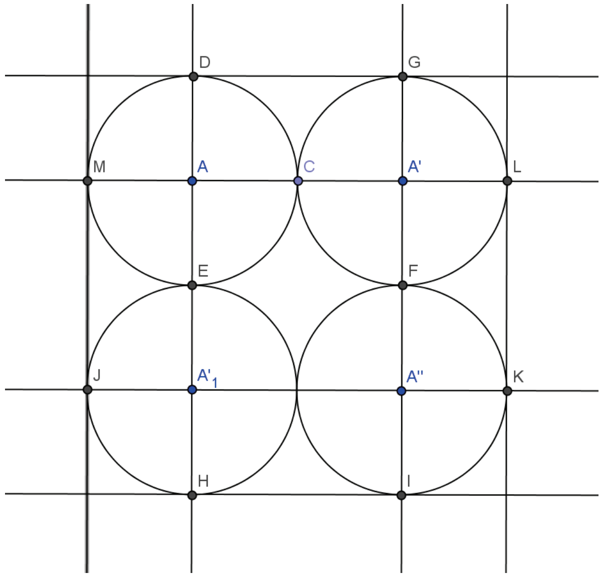
Dibujar las circunferencias de centro A’1 y radio A’1E, y la de centro A’’ y radio A’’F. Hallar los puntos de intersección de cada circunferencia con las rectas AD y A’G, respectivamente.



Trazar una paralela a AA' que pase por A'', marcando los puntos de intersección con cada una de las circunferencias. Marcar también los puntos de intersección de las dos primeras circunferencias con la recta AA'.



Dibujar las rectas DG, LK, IH y MJ.



La cantidad de trabajo que requiere hacer este copiado muestra lo necesario que resulta registrar cómo se lo hizo.

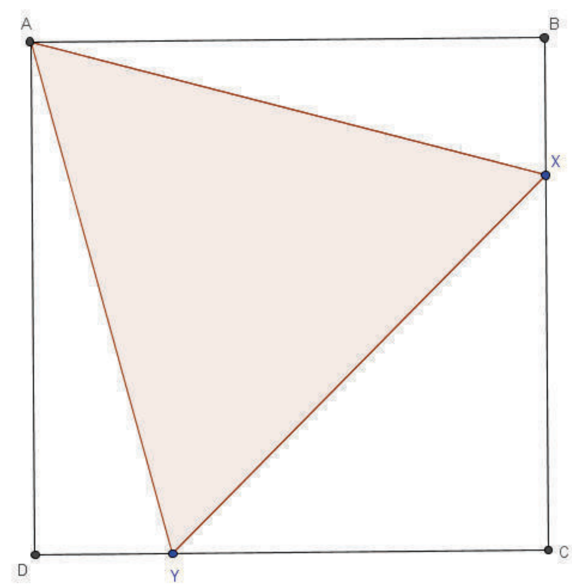
¿Qué dejar escrito sobre este problema?

- El relato de cómo se realizó la copia, explicitando las decisiones que tomaron acerca de por dónde comenzar y la exploración previa hecha con lápiz y papel.
- La explicación de por qué pueden estar seguros de que la copia es correcta, cómo saber que no se va a deformar al arrastrarla.

Para resolver el siguiente problema es necesario que los alumnos sepan cómo dibujar un triángulo equilátero. Será decisión del docente discutirlo cuando surja como necesidad o plantear una actividad previa en la cual se pida hacer esa construcción. Al no ser esa construcción el objeto de la actividad, no resulta indispensable que resulte como una discusión durante la resolución.

Actividad 6

Reproducí la siguiente figura, donde el triángulo AXY es equilátero y ABCD es un cuadrado:

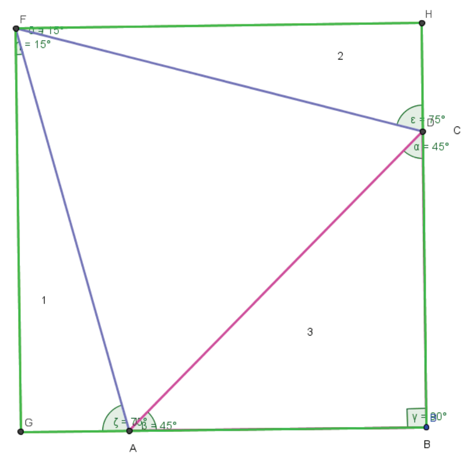


Esta construcción requiere realizar ciertas manipulaciones –que conviene realizar con lápiz y papel– para decidir por dónde comenzar. Las relaciones en juego hacen que no alcance con ensayos directamente sobre el programa, o que no resulte simple decidir mientras se está intentando hacer una construcción.

Es interesante también poder discutir acerca de qué datos pueden utilizarse, qué se sabe y qué no. Por ejemplo, al no dar medidas, no es posible saber la medida del segmento BX. Muchos alumnos suponen que mide un cuarto de BC, lo cual lleva a hacer una construcción que parece correcta pero no lo es, ya que el triángulo resultante no es equilátero.

Si bien resulta posible medir BX y BC en el dibujo dado para hallar la relación entre ellos, aun suponiendo que esa proporción se mantiene en cualquier figura semejante a la dada, no resulta una estrategia interesante. Una manera de restringir su uso –que no hemos casi observado– es pensar en medidas que produzcan una relación que sea difícil de medir, como 7/9.

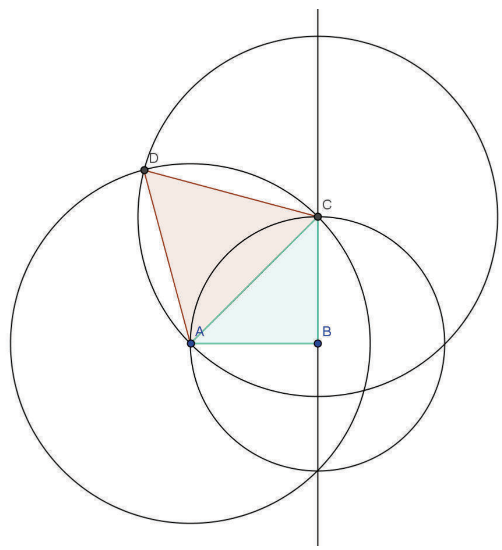
Una posibilidad de resolución es trabajar sobre una figura de análisis para determinar las medidas de cada uno de los ángulos que forman la figura o para analizar qué triángulos son iguales. Si esto no surgiera, el docente puede proponer hacerlo.



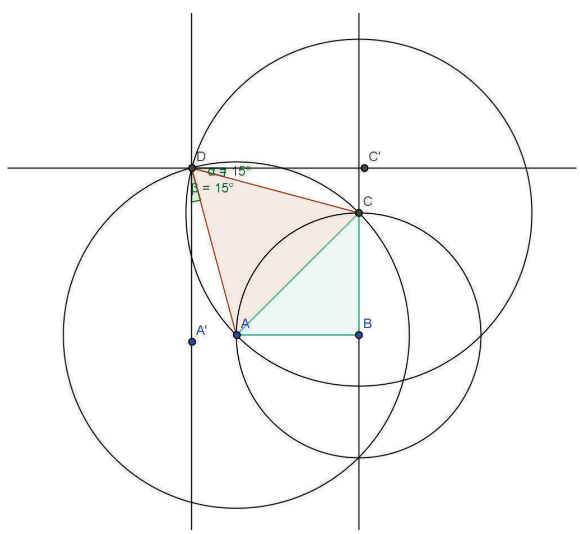
- Los ángulos del triángulo equilátero miden 60° cada uno.
- Los triángulos 1 y 2 son iguales por ser rectángulos y tener dos lados iguales (el lado del triángulo equilátero y el del cuadrado), por lo que sus ángulos también son iguales.
- El triángulo 3 es isósceles y rectángulo. Isósceles porque, como GA = HC y FHBG es un cuadrado, entonces CB = AB. Como consecuencia, sus ángulos agudos son de 45° cada uno.

A partir de las relaciones anteriores, puede verse que una construcción posible es a partir del triángulo 3, cuya hipotenusa es el lado del triángulo:

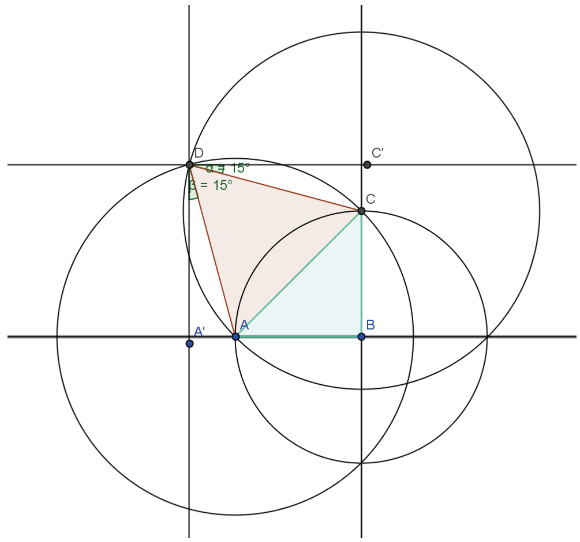
- Construir un triángulo isósceles rectángulo ABC.
- Usando la hipotenusa del triángulo ABC, construir un triángulo equilátero ACD.



- Dibujar dos rectas con origen en D que formen ángulos de 15° con DC y DA, respectivamente.



- Dibujar rectas perpendiculares a DC’ y DA’ que pasen por B.



¿Qué podría quedar registrado a partir de la resolución de este problema?

Como la cantidad de conocimientos que es necesario poner en juego son muchos, es importante realizar un trabajo sobre las explicaciones. Pensar en cómo presentar una explicación de por qué la construcción lleva a la figura dada no es sencillo y posiblemente requiera de más de una clase. Se podría pedir a los alumnos que en grupos o como tarea redacten las diferentes explicaciones, las compartan y luego se dedique un espacio de la clase para analizar si son completas y correctas, con el objetivo de mejorarlas y acordar criterios de escritura.

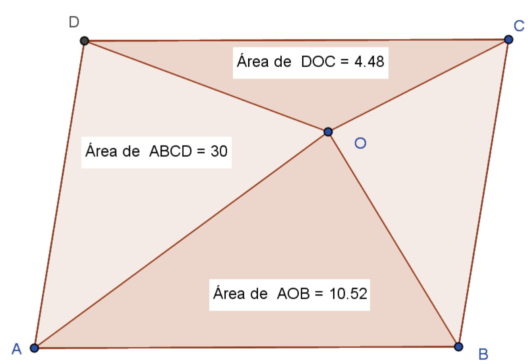
El siguiente problema tiene diversos objetivos. Por un lado, plantea un uso del programa como herramienta de exploración. Por el otro, pone el acento sobre la cantidad de soluciones que puede tener un problema, que en este caso son infinitas o ninguna.

Actividad 7

Sea ABCD un paralelogramo y O un punto interior del mismo. Ubicá el punto O de manera que la suma de las áreas de los triángulos OAB y ODC sea:

- *menor que el área del paralelogramo.*
- *Igual que el área del paralelogramo.*

La realización de una construcción dinámica que represente la situación se torna indispensable para poder explorar la relación entre las áreas a medida que el punto O cambia de ubicación. A partir de la misma es posible determinar y esbozar una explicación acerca de por qué la suma de las áreas de los triángulos es siempre menor que el área del paralelogramo.



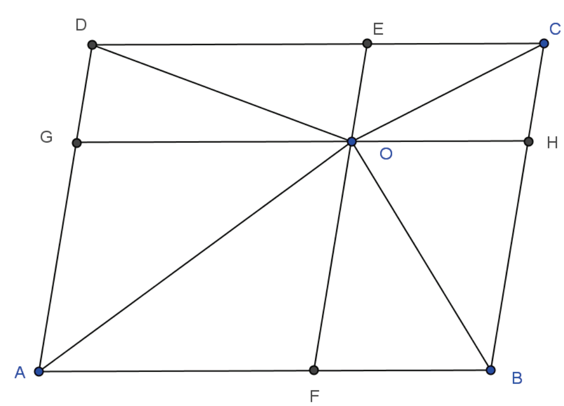
Los alumnos no tienen dificultades para visualizar que la suma de las áreas de los triángulos tiene que ser menor que el área del paralelogramo, ya que se trata de una parte de su área.

Pero también es posible precisar esta relación aún más y elaborar una conjetura: que la suma de áreas de los triángulos es exactamente la mitad del área del paralelogramo. Si esta conjetura no surge por parte de los alumnos, es posible que el docente haga preguntas que lleven a elaborarla. Por ejemplo: "Ustedes acaban de explicar por qué la suma de estas áreas no puede ser nunca igual ni mayor que el área del paralelogramo. ¿Qué relación hay entre estas áreas?".

Se trata de una relación que puede constatarse para las diversas ubicaciones del punto O que se prueben, pero que será necesario validar algebraica o geométricamente. No alcanza con saber que una propiedad que se observa en algunos dibujos se va a cumplir siempre. Es necesario un trabajo deductivo.

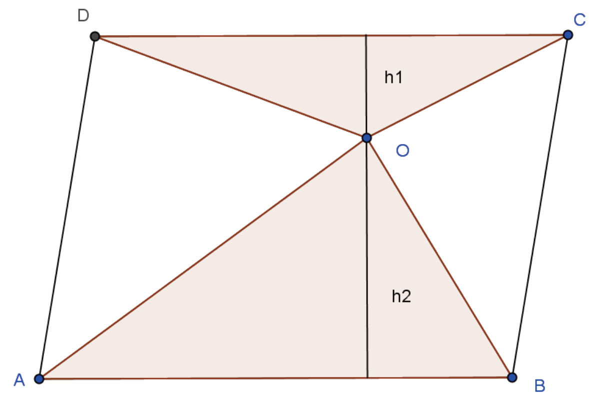
Este es el momento de abandonar el programa para tomar el lápiz y papel. Si bien se trata de una validación que está al alcance de los conocimientos de los alumnos, no se espera que puedan elaborarla completamente solos. De todos modos, nos parece importante que puedan buscar algunas relaciones, que el docente podrá retomar en el momento de la puesta en común.

Una demostración geométrica puede hacerse trazando segmentos paralelos a los lados del paralelogramo que pasen por el punto O.



El área del triángulo DOE es la mitad del área del paralelogramo DEOG. Lo mismo sucede con el triángulo ECO y el paralelogramo ECHO, el triángulo OBF y el paralelogramo OHBF y el triángulo AOF y el paralelogramo GOFA. De allí resulta que las áreas de los triángulos considerados constituyen la mitad del área del paralelogramo.

Otra posibilidad es realizar una demostración algebraica.



El triángulo ABO tiene base AB y altura h2, mientras que el triángulo CDO tiene base CD (igual a AB) y altura h1. Vale además que h1+h2=h, donde h es la altura del paralelogramo. Si sumamos las áreas de los dos triángulos tenemos:

$$\frac{AB\cdot h_2}{2}+\frac{CD\cdot h_1}{2}=\frac{AB\cdot h_2}{2}+\frac{AB\cdot h_1}{2}$$
$$=\frac{AB\cdot h_2+AB\cdot h_1}{2}$$
$$=\frac{AB\cdot\left(h_2+h_1\right)}{2}=\frac{AB\cdot h}{2}$$

Al calcular la suma de las áreas de los triángulos para alturas cualesquiera se llega a que es igual a la mitad del área del paralelogramo, por lo que la propiedad es verdadera siempre.

Nos interesa volver sobre el problema y analizar los diferentes marcos en los que pudo ser resuelto: la tecnología permitió explorar y conjeturar, las demostraciones tuvieron que ser llevadas a cabo en los marcos geométrico o algebraico. Plantea un interesante ejercicio pensar y analizar qué conocimientos son necesarios en cada uno de los casos, qué diferencias plantea una y otra manera de pensar la validación y las relaciones entre ambas.

A modo de cierre de la primera secuencia

Las investigaciones señalan tres aplicaciones importantes de los programas de Geometría dinámica: la heurística, la exploración y la visualización. Su potencialidad para la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática depende en gran medida de situaciones cuidadosamente diseñadas y conducidas por el docente, por un lado, y, por el otro de las posibilidades que se les brinde a los alumnos de conjeturar, cometer errores, discutir las relaciones entre los objetos e interpretarlas, de ofrecer explicaciones matemáticas, etc.

A medida que avanza el trabajo con el programa, las explicaciones de los alumnos se van basando más en cuestiones matemáticas que en observables, siempre que esto sea un objetivo de enseñanza. También se abre la posibilidad de que los alumnos desarrollen nuevas estrategias de resolución o control. Por ejemplo, la función Protocolo de construcción, que no tiene correlato con el lápiz y papel, permite revisar los pasos seguidos.

La posibilidad de limitar los comandos a utilizar funciona como un motor para poner en juego estrategias de resolución que apelen a otros conocimientos, al igual que la limitación en el uso de instrumentos de construcción.

El ambiente computacional brinda una amplia posibilidad de experimentación con los dibujos, lo cual no está disponible con el lápiz y papel debido, entre otras cuestiones, a la imprecisión del trazo y de los instrumentos geométricos, a no poder ocultar partes de un dibujo, a la limitación en la cantidad de objetos a dibujar, etc.

Secuencia 2. Funciones

Muchas corrientes de investigación en Didáctica de la Matemática consideran a la actividad matemática como un trabajo sobre objetos que no son accesibles directamente, sino a través de representaciones. Para poder operar sobre esos objetos es necesario representarlos, y la introducción de nuevas herramientas pone a la representación en un primer plano. El desarrollo de tecnologías para la enseñanza de la Matemática contribuye a esto de manera particular dando una gran dimensión a las representaciones y a las formas de manipularlas.

Es importante señalar que una representación puede tener, para el que la concibe, significados diferentes que para quien la utiliza. Aunque el que desarrolla una herramienta tenga una idea clara de cómo una representación se relaciona con un objeto matemático, no hay garantías de que quienes la utilizan vean la misma relación o el mismo objeto. Tran Kiem Minh [13] afirma que "la representación es de naturaleza contextualizada y social, y la relación entre representaciones y objetos depende de la perspectiva de quien la interpreta". Señala también que la relación entre objeto y representación se inscribe en convenciones sociales marcadas por la cultura de una comunidad. De allí resulta, entonces, que no es posible limitarse a un punto de vista estrictamente cognitivo, ya que se trata de procesos de aprendizaje. La relación entre objeto y representación debería considerarse como un objeto de enseñanza.

En esta secuencia se pone en juego una de las grandes posibilidades de GeoGebra, que es la coordinación entre distintos registros de representación. Más precisamente, nos referimos, en este caso, a la coordinación entre el registro gráfico y el registro algebraico, representados en GeoGebra en las Vistas Gráfica y Algebraica, respectivamente. Creemos que esta coordinación es esencial e imprescindible para el aprendizaje matemático, para dotar de sentido a los conocimientos, de manera que resulten potentes, tanto para su uso en la resolución de problemas como para la construcción de nuevos conocimientos. A propósito de esto, afirma Raymond Duval:

> *La comprensión (integradora) de un contenido conceptual reposa en la coordinación de al menos dos registros de representación, y esta coordinación se manifiesta por la rapidez y la espontaneidad de la actividad cognitiva de conversión. [...]*
> *Esta coordinación está lejos de ser natural. Y no parece poder realizarse en el marco de una enseñanza principalmente determinada por los contenidos conceptuales. Se puede observar en todos los niveles un encasillamiento de los registros de representación en la gran mayoría de los alumnos. Estos no reconocen al mismo objeto a través de las representaciones que se dan de él en los sistemas*

[13] Tran Kiem Minh (2011), pág. 18.

> *semióticos diferentes: la escritura algebraica de una relación y su representación gráfica, la escritura numérica de una relación y su representación geométrica sobre una recta o en el plano, el enunciado de una fórmula en francés*[14] *y la escritura de esta fórmula en forma literal, la descripción de una situación y su planteamiento en una ecuación… Este encasillamiento subsiste aun después de una enseñanza sobre los contenidos matemáticos que ha utilizado frecuentemente esos registros diferentes.*
> *Naturalmente, la ausencia de coordinación no impide toda la comprensión. Pero esta comprensión, limitada al contexto semiótico de un solo registro, apenas favorece las transferencias y los aprendizajes ulteriores: ella vuelve a los conocimientos adquiridos poco movilizables en todas las situaciones donde deberían realmente ser utilizadas. En definitiva, esta comprensión mono-registro conduce a un trabajo a ciegas, sin posibilidad de control de "sentido" de lo que se hace. (Duval, 1996)*

El registro algebraico al que refiere la cita está principalmente vinculado con la actividad algebraica usual con lápiz y papel: la producción y escritura de fórmulas acompañadas por tratamientos dentro del mismo registro. Deberíamos agregar, entonces, algunas tareas que introduce el programa. Estas tareas están relacionadas con:

- La escritura de las fórmulas en la computadora: la sintaxis propia del software hace que se deba realizar un tratamiento para volcar la escritura usual a la específica del programa.
- La interpretación del tratamiento algebraico de las fórmulas hecho por el programa: luego de ingresar expresiones algebraicas, GeoGebra las muestra en pantalla de manera que se parezcan al modo en el que se escriben en lápiz y papel, a veces modificándolas para que aparezcan simplificadas.
- La interpretación de la conversión inevitable entre registros: por las características del programa, cuando se ingresa una fórmula en la Barra de Entrada o se realiza una construcción geométrica mediante la barra de herramientas, se generan por igual dos representaciones, una gráfica y otra algebraica. GeoGebra realiza una conversión automática entre registros, a diferencia de un trabajo con lápiz y papel, cuando el encargado de la conversión es el propio estudiante. Claramente, la interpretación de la relación entre registros queda a cargo del alumno.

[14] Traducido del original, que está escrito en francés. Se refiere al enunciado coloquial de una fórmula.

La interacción con la computadora requiere de mucho más que la percepción. La interpretación de las imágenes se apoya en la utilización de conocimientos matemáticos. Y es tarea de la enseñanza trabajar sobre cómo coordinar aquello que se ve con lo que se sabe.

En esta secuencia suponemos distintos tipos de tareas, entre las que podemos señalar:

- El trabajo algebraico con lápiz y papel.
- El volcado de este trabajo en la computadora.
- La interpretación de las acciones del programa (escritura de expresiones y dibujos de gráficos).
- La comprensión de las conversiones hechas por la computadora y su interpretación.
- La explicitación de relaciones existentes entre las producciones obtenidas en las distintas instancias de trabajo. Por ejemplo, describir cuál es la relación que existe entre la modificación del término independiente de una función cualquiera y el desplazamiento vertical de su gráfico.

Objetivos de la secuencia

- Trabajar problemas sobre funciones con el uso de deslizadores.
- Modelizar un problema a partir de un gráfico dinámico.
- Analizar las relaciones entre los registros gráfico y algebraico.
- Utilizar deslizadores como herramientas de exploración.
- Utilizar la computadora para resolver un problema de optimización.

Contenidos

- Distintas formas de entrada de una función en GeoGebra.
- Función lineal: pendiente, ordenada al origen, raíz, registro gráfico-algebraico.
- Rectas paralelas y perpendiculares.
- Sistemas de ecuaciones lineales.

- Función cuadrática: gráfica, raíces, vértice y simetría.
- La función cuadrática como instrumento de modelización de situaciones geométricas.
- Deslizador.
- Comando para hallar perímetro: Perímetro[<Polígono>]
- Comandos para hallar área: Area[<Polígono>]
- Activar rastro.

Relaciones con los NAP

La secuencia que presentaremos está pensada para ser utilizada en diferentes años, según los conocimientos disponibles en los alumnos.

A continuación mostramos los contenidos de los NAP con los que se relaciona.

7.° año – 1.° año

- El análisis de variaciones en situaciones problemáticas que requieran:
    - reconocer y utilizar relaciones directa e inversamente proporcionales, usando distintas representaciones (tablas, proporciones, constante de proporcionalidad,...) y distinguirlas de aquellas que no lo son;
    - explicitar y analizar propiedades de las relaciones de proporcionalidad directa (al doble el doble, a la suma la suma, constante de proporcionalidad) e inversa (al doble la mitad, constante de proporcionalidad);
    - analizar la variación de perímetros y áreas en función de la variación de diferentes dimensiones de figuras;
    - interpretar y producir tablas e interpretar gráficos cartesianos para relaciones entre magnitudes discretas y/o continuas.
- El uso de distintas expresiones simbólicas en situaciones problemáticas que requieran:
    - explorar y explicitar relaciones (entre múltiplos y/o divisores de un número...) y propiedades de las operaciones con números naturales (distributiva, asociativa...) en forma oral y escrita.

1.° año – 2.° año

- El uso de relaciones entre variables en situaciones problemáticas que requieran:
  - interpretar relaciones entre variables en tablas, gráficos y fórmulas en diversos contextos (regularidades numéricas, proporcionalidad directa e inversa...);
  - modelizar variaciones uniformes y expresarlas eligiendo la representación más adecuada a la situación;
  - explicitar y analizar propiedades de las funciones de proporcionalidad directa (variación uniforme, origen en el cero);
  - producir y comparar fórmulas para analizar las variaciones de perímetros, áreas y volúmenes, en función de la variación de diferentes dimensiones de figuras y cuerpos;
  - producir fórmulas para representar regularidades numéricas en $\mathbb{N}$ y analizar sus equivalencias.
- El uso de ecuaciones y otras expresiones algebraicas en situaciones problemáticas que requieran:
  - producir y analizar afirmaciones sobre propiedades de las operaciones o criterios de divisibilidad avanzando desde su expresión oral a su expresión simbólica, y argumentar sobre su validez;
  - transformar expresiones algebraicas obteniendo expresiones equivalentes que permitan reconocer relaciones no identificadas fácilmente en la expresión original, usando diferentes propiedades al resolver ecuaciones del tipo $ax + b = cx + d$;
  - usar ecuaciones lineales con una variable como expresión de una condición sobre un conjunto de números y analizar su conjunto solución (solución única, infinitas soluciones, sin solución).

2.° año – 3.° año

- El reconocimiento, uso y análisis de funciones en situaciones problemáticas que requieran:
  - interpretar gráficos y fórmulas que modelicen variaciones lineales y no lineales (incluyendo la función cuadrática) en función de la situación;
  - modelizar y analizar variaciones lineales expresadas mediante gráficos y/o fórmulas, interpretando sus parámetros (la pendiente como cociente de incrementos y las intersecciones con los ejes);
  - determinar la ecuación de una recta a partir de diferentes datos;
  - vincular las relaciones entre rectas con las variaciones de sus parámetros.
- El uso de ecuaciones y otras expresiones algebraicas en situaciones problemáticas que requieran:
  - argumentar sobre la validez de afirmaciones que incluyan expresiones algebraicas, analizando la estructura de la expresión;
  - transformar expresiones algebraicas usando diferentes propiedades al resolver ecuaciones de primer grado;
  - argumentar sobre la equivalencia o no de ecuaciones de primer grado con una variable;
  - usar ecuaciones lineales con una o dos variables y analizar el conjunto solución;
  - vincular las relaciones entre dos rectas con el conjunto solución de su correspondiente sistema de ecuaciones.

3.° año – 4.° año

- La modelización de situaciones extramatemáticas e intramatemáticas mediante funciones lineales y cuadráticas, lo que supone:
    - usar las nociones de dependencia y variabilidad,
    - seleccionar la representación (tablas, fórmulas, gráficos cartesianos realizados con recursos tecnológicos) adecuada a la situación,
    - interpretar el dominio, el codominio, las variables, los parámetros y, cuando sea posible, los puntos de intersección con los ejes y el máximo o mínimo en el contexto de las situaciones que modelizan.
- El análisis del comportamiento de las funciones lineales y cuadráticas, lo que supone:
    - interpretar la información que brindan sus gráficos cartesianos y sus fórmulas,
    - vincular las variaciones de sus gráficos con las de sus fórmulas y establecer la incidencia de tales variaciones en las características de las funciones, apelando a recursos tecnológicos para construir los gráficos.
    - La interpretación de diferentes escrituras de las fórmulas de las funciones cuadráticas y su transformación mediante las propiedades de las operaciones de números reales, (factor común, cuadrado de un binomio, diferencia de cuadrados) si la situación lo requiere.
- La modelización de situaciones extramatemáticas e intramatemáticas mediante sistemas de ecuaciones lineales, lo que supone:
    - apelar a transformaciones algebraicas que conserven el conjunto solución de dichos sistemas,
    - interpretar las soluciones en el contexto de la situación.

- El análisis de sistemas de ecuaciones lineales con dos variables, lo que supone:
    - interpretar la equivalencia de los sistemas que se van obteniendo durante los procesos de resolución analítica,
    - vincular dichos procesos con las correspondientes representaciones gráficas obtenidas mediante recursos tecnológicos.
- El análisis de las relaciones entre los coeficientes de las variables, la posición de las rectas y el conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales.
- La modelización de situaciones extramatemáticas con restricciones, donde las relaciones entre las variables que intervienen se expresan mediante ecuaciones lineales, y las restricciones con inecuaciones lineales.
- La modelización de situaciones extramatemáticas e intramatemáticas mediante ecuaciones cuadráticas, lo que supone:
    - apelar a las propiedades de las operaciones de números reales (factor común, cuadrado de un binomio, diferencia de cuadrados) y a gráficos cartesianos realizados con recursos tecnológicos para su resolución,
    - interpretar las soluciones en el contexto de la situación.
- El análisis de la ecuación cuadrática vinculando la naturaleza de sus soluciones con la gráfica de la función correspondiente.

4.° año – 5.° año

- La modelización de situaciones extramatemáticas e intramatemáticas mediante funciones polinómicas de grado no mayor que cuatro e incompletas, racionales de la forma $f(x)= k/x$, con $x \neq 0$, y funciones exponenciales, lo que supone:
    - usar las nociones de dependencia y variabilidad,

- seleccionar la representación (tablas, fórmulas, gráficos cartesianos realizados con recursos tecnológicos) adecuada a la situación,
- interpretar el dominio, el codominio, las variables, los parámetros y, cuando sea posible, los puntos de intersección con los ejes, máximos o mínimos, y asíntotas, en el contexto de las situaciones que modelizan.

- La comparación de los crecimientos lineales, cuadráticos y exponenciales en la modelización de diferentes situaciones.
- El análisis del comportamiento de las funciones polinómicas de grado no mayor que cuatro e incompletas, exponenciales y logarítmicas, lo que supone:
  - interpretar la información que portan sus gráficos cartesianos y sus fórmulas,
  - vincular las variaciones de los gráficos con las de sus fórmulas y la incidencia de tales variaciones en las características de las funciones, apelando a recursos tecnológicos para construir los gráficos.

Desarrollo de la secuencia

Antes de comenzar con la resolución de los problemas de la secuencia, que se apoya en un trabajo sobre funciones y deslizadores, se prevé que el docente proponga a los alumnos algunas actividades con el objetivo de aprender a ingresar fórmulas de funciones y comprender el funcionamiento de los deslizadores.

Una manera de hacerlo es a partir de un trabajo colectivo comandado por el docente, donde se registre qué es necesario tener en cuenta. Pueden mostrarse ejemplos sobre cómo ingresar puntos, funciones sin parámetros o curvas definidas a partir de una ecuación.

Una primera cuestión a tener en cuenta es la sintaxis que debe ser usada, la que puede adquirir diversas formas. Por ejemplo, son opciones válidas ingresar:

- *f*(*x*) = 3**x*+5
- *f*(*x*) = 3*x*+5
- *f*(*x*) = 3 *x* + 5 (dejando un espacio entre "3" y "*x*" como modo de indicar el producto).

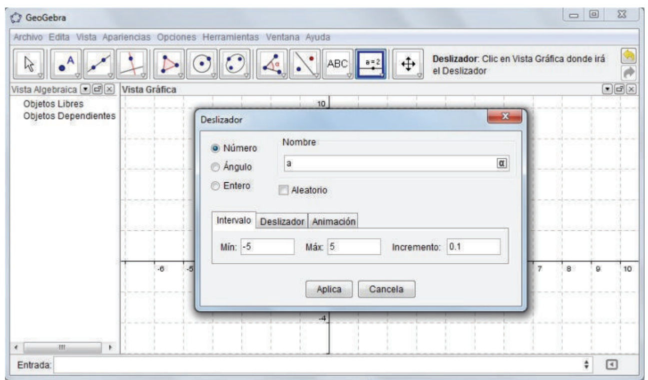
Es importante señalar algunas características que adquiere la notación de multiplicaciones entre variables. Por ejemplo, el producto entre un deslizador "*m*" y la variable "*x*" no puede expresarse de la forma "*mx*"; debe utilizarse la forma "*m x*" o "*m***x*". Vale notar que si se escribe simplemente "3**x*+5", GeoGebra agrega en forma automática un nombre de función cuya fórmula es la ingresada.

Otra cuestión a tener en cuenta es el tipo de objeto que interpreta y genera GeoGebra. Por ejemplo, la expresión "*y*=3**x*+5" no es considerada por GeoGebra como una función sino como una recta. Para el programa no es lo mismo una relación funcional que los puntos que son solución de una ecuación en dos variables. Esto resulta relevante si se quiere operar con los objetos. Por ejemplo, la herramienta Recta Perpendicular no puede aplicarse a una función y la herramienta Derivada no puede aplicarse a una recta.

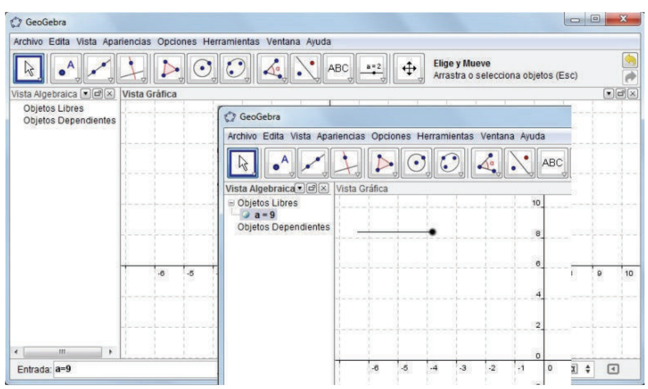
Los deslizadores contienen un punto “flotante” que permite modificar dinámicamente el valor de un parámetro en una expresión. Son representados por un punto en un segmento, que a su vez representa al deslizador. Con la ayuda de un cursor, los puntos pueden ser desplazados, cambiando sus valores numéricos. Como consecuencia, se modifica la gráfica y el alumno podrá explorar, observar, conjeturar y poner a prueba sus conjeturas.

El docente podrá explicar la noción de deslizador, dando un ejemplo de construcción, su uso y su comportamiento con, por ejemplo, el trazado de una circunferencia de radio variable, cuya medida viene dada por el deslizador.

Existen dos maneras de ingresar un deslizador: una es mediante la Barra de Herramientas, seleccionando el botón y haciendo clic en la pantalla. Otra forma es a través de la Barra de Entrada. En este segundo caso, si se ingresa "*a*=9", por ejemplo, queda asignado el valor 9 como el máximo dentro del rango en que se puede hacer variar este parámetro. Si bien esta opción es rápida para ser ingresada, no evidencia la función del deslizador como parámetro, cosa que sí ocurre al ingresarlo a través del ícono. Otra desventaja es que el deslizador se crea oculto, es decir que no se ve en la Vista Gráfica.



Menú del Deslizador



Deslizador ingresado por Barra de Entrada

Luego de que el deslizador es creado por medio de la herramienta Deslizador, se abre una ventana de opciones. Los valores Mín y Máx son los límites inferior y superior de los valores que tomará el deslizador.

Para deslizar el deslizador es necesario elegir la herramienta Elige y Mueve.

Es importante aclarar que el deslizador no es un elemento geométrico, que su posición en la pantalla es absoluta y no, relativa a los ejes, aunque se puede mover en la pantalla de acuerdo a las necesidades del caso.

Actividad 1

Usando un deslizador realicen una construcción que describa, para cada caso:

(a) La familia de rectas con pendiente 3.

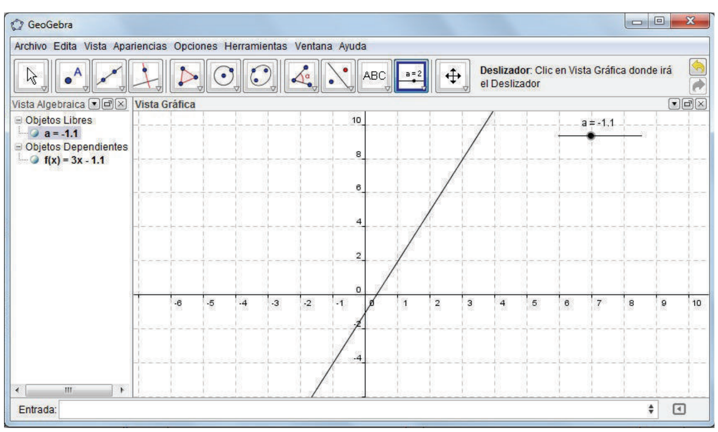
(b) La familia de rectas con ordenada al origen -2.

(c) La familia de rectas con raíz x = 6.

Los dos primeros ítems apuntan, por un lado, a dar sentido al uso del deslizador en la ecuación de una recta donde la pendiente es dada y la ordenada al origen es parámetro (y viceversa). Por el otro, tienen por finalidad analizar cómo varía la gráfica de una recta al cambiar su ordenada al origen y su pendiente, respectivamente.

No se espera que los alumnos "descubran" cómo hacer para ingresar una función con un parámetro, sino que el docente podrá indicar cómo hacerlo, dejando registrado el procedimiento y cuestiones a tener en cuenta.

Una vez definida la familia de rectas, se obtendrá una recta de pendiente 3 para cada valor que tome la ordenada al origen, coincidiendo con el valor del deslizador.



Familia de rectas de pendiente 3 (con deslizador)

En un momento de debate colectivo, puede preguntarse por la variación de los gráficos en cada caso, registrando las conclusiones, como por ejemplo:

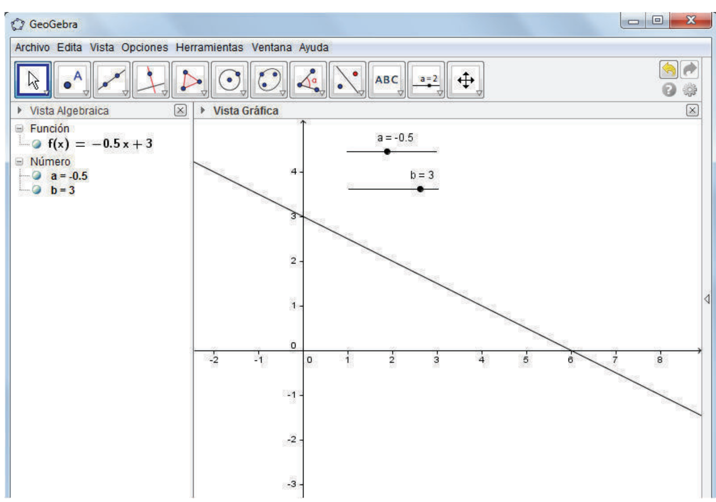
Las rectas de pendiente 3 tienen la misma dirección. A medida que cambia la ordenada al origen, cambia el punto donde la recta corta al eje de ordenadas.

Las rectas de ordenada al origen -2 cortan al eje de ordenadas en el punto (0,-2). A medida que cambia la pendiente, cambia la dirección.

El último ítem propone una actividad en la que no resulta inmediato cómo escribir la ecuación de la recta. Es probable que los alumnos necesiten hacer algunos ensayos con lápiz y papel para analizar cuál es la fórmula de la función a ingresar.

Algunas estrategias de resolución son:

- Modelizar la situación con dos deslizadores e intentar ajustarlos hasta dar con una solución. Esta estrategia permite poner de manifiesto que los deslizadores varían de forma independiente uno del otro, lo cual hace que no se logre visualizar el haz de rectas, sino algunas en particular.



Por aproximación con dos deslizadores

- Construir en lápiz y papel ecuaciones que permitan encontrar las relaciones entre la pendiente y la ordenada. Dependiendo de qué variable elijan, pueden despejar a b en función de m, o a m en función de b:

Usando que *f*(6)=0, resulta que

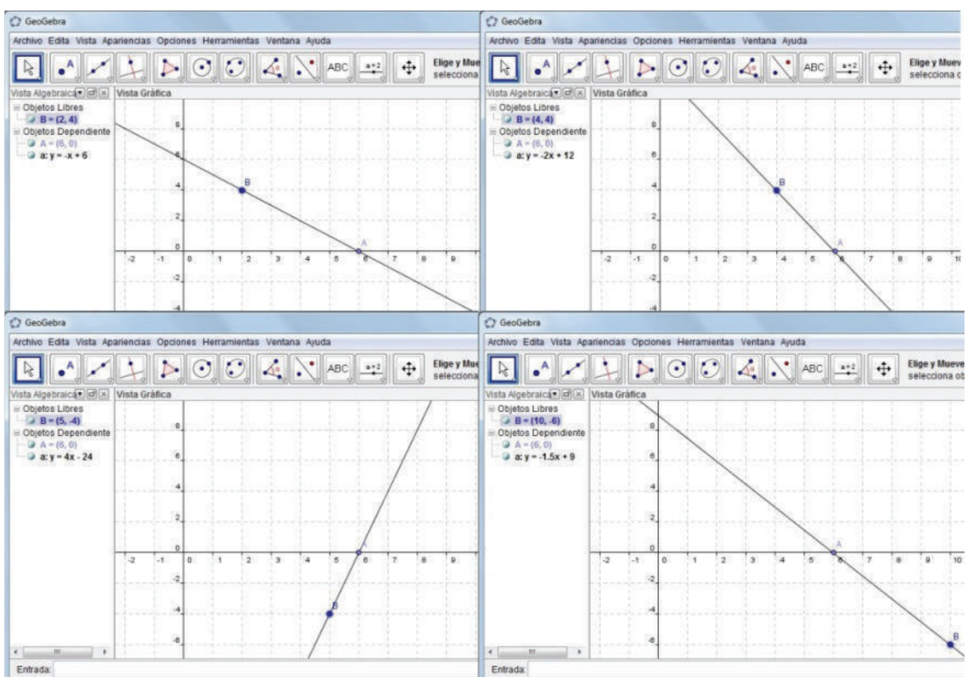
$$0 = 6m + b \Rightarrow b = -6m \Rightarrow f(x) = mx - 6m$$

o bien

$$0 = 6m + b \Rightarrow m = -\frac{1}{6}b \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{6}bx + b$$

- Construir una recta que pase por el punto (6,0) y por otro punto libre cualquiera.

En GeoGebra, todo objeto presenta en pantalla dos representaciones simultáneas: una algebraica y otra gráfica, por lo que cualquier función que se grafique presentará su fórmula en la Vista Algebraica. Esto hace posible analizar qué variaciones se producen en el gráfico y la fórmula, como se muestra en los siguientes ejemplos.



Moviendo el punto libre se obtienen distintas ecuaciones.

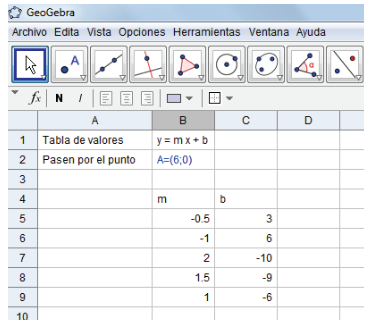
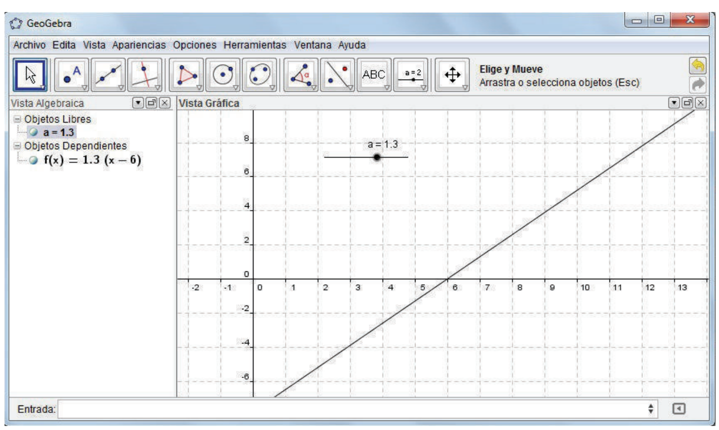


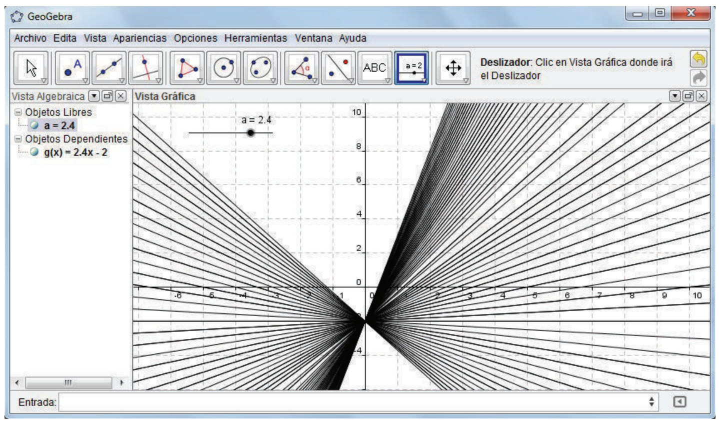
Tabla de valores

- Cargar la ecuación factorizada por la barra de entrada, es decir: $f(x) = a(x-6)$. Producir esta escritura cuando aún no se ha trabajado sobre formas factorizadas de polinomios no es fácil. De todos modos, el docente podrá mostrar que se trata de una ecuación equivalente a las demás. La ventaja de esta escritura es que resulta simple leer de la misma que la raíz es $x = 6$.



Expresión factorizada de la función lineal: f(x)= a(x-6)

Una vez que los alumnos obtienen una construcción dinámica, es posible sugerirles que tilden la opción "Activa rastro", que se encuentra en el menú contextual que aparece al cliquear con el botón derecho sobre la función. De este modo, es posible visualizar la familia de rectas generada en cada uno de los ítems. Es importante mencionar que la familia no está completa por dos motivos: el deslizador está acotado (por los extremos "Mín" y "Máx") y su incremento es racional. Por eso decimos que GeoGebra muestra un gran número de rectas. Es el dinamismo del deslizador lo que nos permite ver gran parte de esa familia.

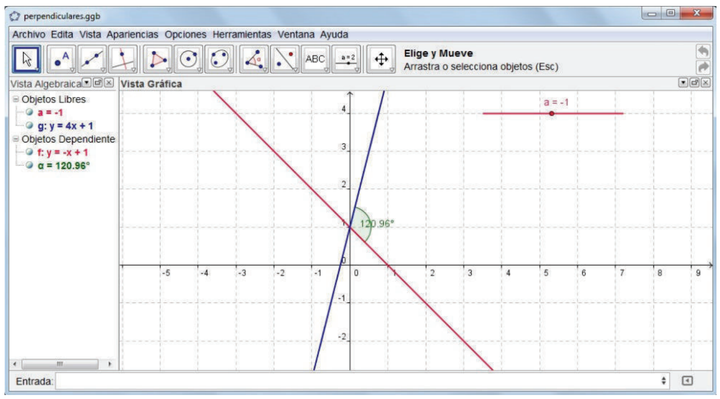


Activa rastro en la familia de rectas con ordenada al origen -2

En todos los casos se puede trabajar con las distintas representaciones de las funciones: en el registro algebraico, en el gráfico y mediante tablas de valores. La articulación entre registros favorece la comprensión del objeto matemático función en tanto fórmula, gráfico y datos que lo representan. Además, los distintos registros se enriquecen al analizarlos en paralelo. Mirando la vista algebraica podemos ver que todas las funciones tienen la misma ordenada al origen, que en la vista gráfica se traduce en que todas cortan al eje de ordenadas en el mismo punto.

Actividad 2

Abran el archivo perpendiculares.ggb[15]



perpendiculares.ggb

(a) Investiguen qué efecto produce el movimiento del deslizador.

(b) ¿Existe algún valor real de a tal que las rectas f(x) y g(x) resulten ser perpendiculares?

(c) ¿Podrían responder la pregunta si la pendiente de la recta g(x) fuese otra?

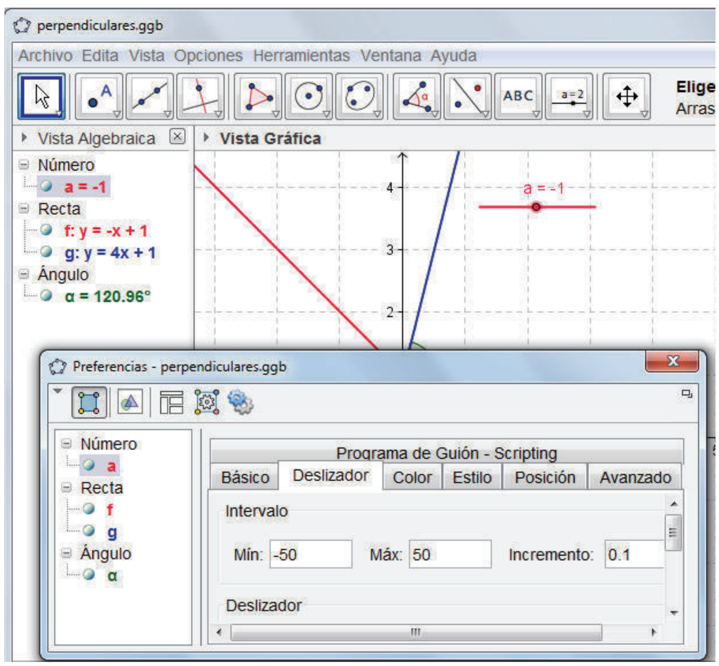
Se trata, en este problema, de arribar a una conjetura acerca de las condiciones bajo las cuales dos rectas son perpendiculares. El hecho que no se proponga realizar una construcción permite poner la atención sobre qué sucede al cambiar el valor del parámetro, favoreciendo la elaboración de una conjetura.

Las rectas dadas se intersecan en el punto (0, 1), independientemente del valor que tome el deslizador, que representa la pendiente de la

[15] Se trata de un escenario armado, preparado para que los alumnos puedan explorar la relación entre las pendientes de rectas perpendiculares. Los alumnos encontrarán una pantalla como la que figura debajo, en la que, al mover el deslizador, cambia el ángulo entre las rectas.

recta f. El ángulo entre las rectas está visible en la pantalla y cambia con el deslizador, cuyo incremento está definido en 0.1, por lo que no hay una posición del deslizador para el que sean perpendiculares.

Este "accidente", que contrasta con la noción de continuidad según la cual debe existir una solución, debería llevar a los alumnos a buscar la manera de *afinar* el incremento, lo que podrán explorar por sus propios medios o puede ser propuesto por el docente. Se trata de una ocasión para trabajar sobre la noción de Incremento del menú deslizador y su utilidad para la resolución de este problema. Es decir, resulta evidente que tiene que haber una solución, pero no es posible visualizarla a través de la exploración.



Incremento del deslizador

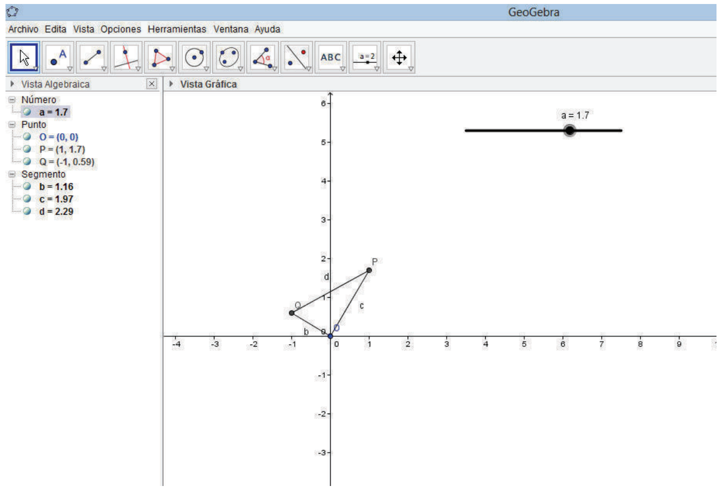
La última pregunta apunta, por un lado, a encontrar una relación entre las pendientes de rectas perpendiculares, y, por el otro, a analizar bajo qué condiciones GeoGebra permite encontrar esa recta. Esta última cuestión plantea una restricción en relación a la cantidad de decimales necesarios para expresar la pendiente de la recta perpendicular. Por ejemplo, si el inverso y opuesto de la pendiente de g es un número entero o con un decimal, no habrá problema en encontrar el valor del deslizador que muestre la perpendicularidad entre ambas rectas. En caso contrario, será necesario modificar el incremento: por ejemplo, la pendiente de una recta perpendicular a una de pendiente 4 es -0,25, que no podrá mostrarse si el deslizador se incrementa en décimos.

Es de interés mencionar que, si uno quiere que el deslizador varíe con mayor precisión que la dada por el movimiento de la mano, pueden utilizarse las flechas cursoras del teclado, para aumentar o disminuir el valor del deslizador de acuerdo al incremento que se haya definido.

La exploración de este escenario puede llevar a los alumnos a elaborar conjeturas acerca de la relación entre las pendientes de las rectas, aunque es esperable que sea necesario un trabajo más sostenido desde el lápiz y papel para validarla. Es posible que los estudiantes encuentren relaciones parciales que el docente podrá retomar en un espacio colectivo, como por ejemplo que las pendientes de las rectas tienen signos opuestos.

Una validación posible de que si las rectas tienen por ecuación $y = ax$, $y = -\frac{1}{a}x$, entonces son perpendiculares es la siguiente.

Consideremos los puntos $(0,0)$, $(1,a)$ y $\left(-1;\frac{1}{a}\right)$



Las medidas de los lados del triángulo que determinan estos tres puntos pueden obtenerse usando la fórmula de distancia entre dos puntos:

$$PQ = \sqrt{(1+1)^2 + \left(a - \frac{1}{a}\right)^2} = \sqrt{4 + \left(a - \frac{1}{a}\right)^2}$$

$$OP = \sqrt{1^2 + a^2} = \sqrt{1 + a^2}$$

$$OQ = \sqrt{(-1)^2 + \left(\frac{1}{a}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{a^2}}$$

Si el triángulo fuese rectángulo, entonces debería verificarse el teorema de Pitágoras. Para ello, calculamos $OP^2 + OQ^2$ y lo comparamos con PQ^2:

$$OP^2 + OQ^2 = 1 + a^2 + 1 + \frac{1}{a^2} = 2 + a^2 + \frac{1}{a^2}$$

$$PQ^2 = 4 + \left(a - \frac{1}{a}\right)^2 = 4 + a^2 - 2 \cdot a \cdot \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} = 4 + a^2 - 2 + \frac{1}{a^2} = 2 + a^2 + \frac{1}{a^2}$$

Como $OP^2 + OQ^2 = PQ^2$, el triángulo es rectángulo. Demostramos que si el producto de las pendientes es -1, entonces las rectas son perpendiculares.

Faltaría validar que si las rectas son perpendiculares, entonces el producto de sus pendientes es -1. Si las rectas tienen por ecuación $y = mx$ e $y = nx$ (con $m \neq 0$ y $n \neq 0$) y consideramos los puntos $O = (0,0)$, $P = (1,m)$ y $Q = (1,n)$, resulta que el triángulo OPQ es rectángulo si y solo si se verifica el Teorema de Pitágoras, es decir si $PQ^2 = OP^2 + OQ^2$

$$\begin{aligned} (n-m)^2 &= 1 + m^2 + 1 + n^2 \\ n^2 - 2nm + m^2 &= 2 + m^2 + n^2 \\ -2mn &= 2 \\ mn &= -1 \end{aligned}$$

Ambas demostraciones son accesibles para los alumnos, ya que solo requieren del teorema de Pitágoras. Puede usarse no solo para validar esta afirmación sino para trabajar sobre cómo se valida, qué significa cada una de las demostraciones que se hizo.

Creemos que es muy importante que quede registrado en las carpetas cuál es la relación entre las pendientes de rectas perpendiculares con las correspondientes demostraciones. Resulta también interesante discutir con los alumnos por qué esta propiedad puede verse en dos sentidos: que si el producto de las pendientes es -1, las rectas son perpendiculares y que, si las rectas son perpendiculares, entonces el producto de las pendientes es -1.

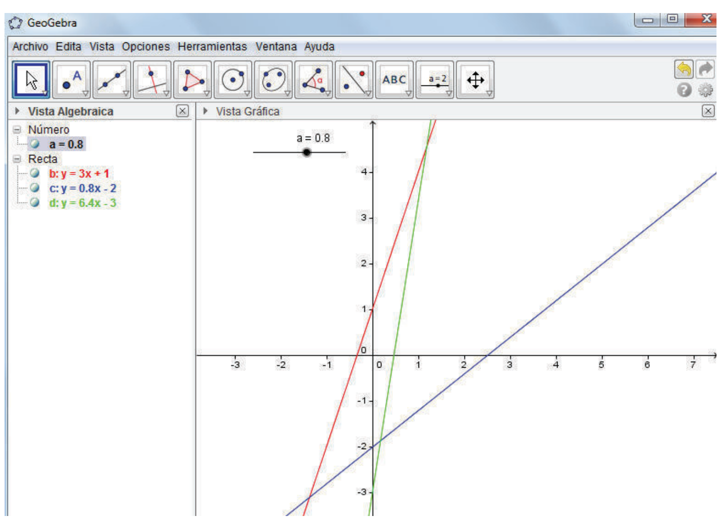
Actividad 3

Estudiar para qué valores de a $a \in ^{\circ}$ *las siguientes rectas forman un triángulo rectángulo:*

$y = 3x + 1 \qquad y = ax - 2 \qquad y = (3a + 4)x - 3$

El problema ofrece un contexto que brinda un sentido geométrico a un sistema de ecuaciones. Si bien esta actividad puede ser llevada a cabo en papel, trabajarla además en GeoGebra permite anticipar la cantidad de soluciones. Esta anticipación ayuda a comprender por qué hay valores que no son solución –aunque se obtienen a través de una resolución algebraica– porque no determinan triángulos rectángulos.

Desde el punto de vista didáctico, resulta interesante la posibilidad de exploración que brinda este problema, debido a que, si bien permite saber la cantidad de soluciones, e incluso tener una idea de en qué intervalo se podrán encontrar, es necesario hallarlas algebraicamente, planteando un interjuego interesante entre GeoGebra y la resolución en lápiz y papel.



Sistema de rectas con deslizador para formar un triángulo rectángulo

Como es posible que aún los alumnos no sepan determinar si conviene o no resolver el problema con el soporte de GeoGebra, el pedido de hacerlo puede quedar a cargo del docente, para reflexionar sobre la decisión en un espacio posterior. Podrá dejarse que tengan un espacio de búsqueda para decidir por dónde comenzar, para luego retomar las razones que llevaron a las estrategias seleccionadas.

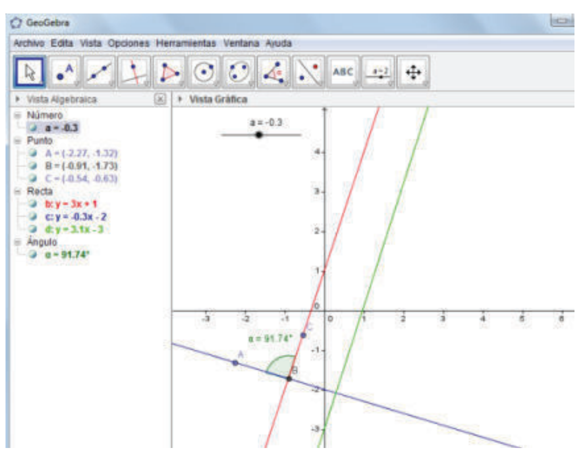
Cualquiera sea la estrategia de resolución elegida, para lograr un triángulo rectángulo se necesita que dos de las rectas sean perpendiculares, lo cual determina tres casos posibles:

- las dos primeras rectas son perpendiculares: $a = -\dfrac{1}{3}$
- la primera y la tercera rectas son perpendiculares: $3a + 4 = -\dfrac{1}{3} \Rightarrow 3a = -\dfrac{13}{3} \Rightarrow a = -\dfrac{13}{9}$
- la segunda y la tercera rectas son perpendiculares:

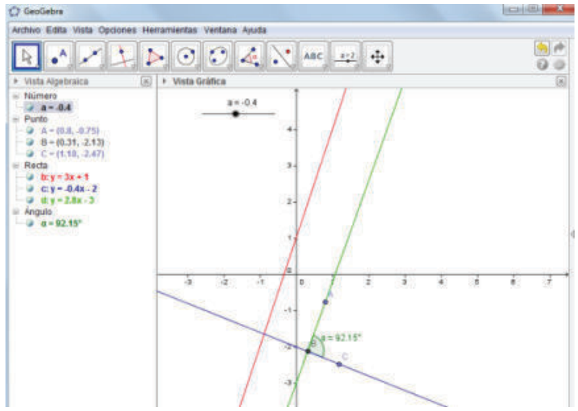
$$3a + 4 = -\frac{1}{a} \Rightarrow 3a^2 + 4a = -1 \Rightarrow 3a^2 + 4a + 1 = 0$$

$$a = -1 \lor a = -\frac{1}{3}$$

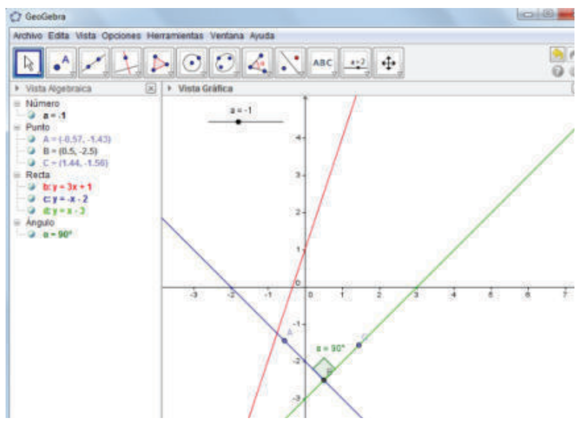
La exploración provee gráficas similares a las siguientes:



y=3x+1 "casi" perpendicular a y=ax-2



y=3x+1 "casi" perpendicular a y=(3a+4)x-3



y=ax-2 perpendicular a y=(3a+4)x-3

Mediante la modelización en GeoGebra puede encontrarse la solución $a=-1$, que plantea la perpendicularidad de las dos últimas rectas. Moviendo el deslizador, es posible visualizar que existe otra solución, aunque se hace imposible encontrarla en forma exacta. Si bien esto puede considerarse una limitación, consideramos que es interesante pues funciona como un motor de la anticipación y validación: se sabe que hay otra solución que el programa no puede brindar, por lo que se torna necesario encontrarla por otros medios. Un abordaje algebraico permite obtener el valor $a=-\dfrac{13}{9}$, tal como mostramos más arriba.

La resolución algebraica permite encontrar como solución $a = -\frac{1}{3}$.

Analizando qué sucede para valores de a en un entorno de $-\frac{1}{3}$ puede verse que el triángulo "cambia de lado". Un análisis más detallado permite ver que, si bien dos de las rectas son perpendiculares, también dos de ellas resultan paralelas, de modo que no queda formado un triángulo.

La interacción entre lo algebraico y geométrico, que se visualiza en GeoGebra, permite dar sentido a las soluciones que se obtienen, para descartarlas sabiendo por qué.

Si bien ese valor podría ser descartado haciendo un análisis completo del problema, no resulta evidente que hay que controlar las condiciones para que ese triángulo se forme y GeoGebra colabora con eso.

Además de registrar la resolución del problema, nos parece importante que queden anotadas cuestiones referidas al modo de trabajo que propone GeoGebra. Por ejemplo:

GeoGebra permite saber cuántas soluciones hay y en qué intervalo están. A veces es necesario encontrarlas mediante un trabajo con lápiz y papel.

A veces hay soluciones que se encuentran con lápiz y papel que son soluciones de la ecuación pero no, del problema. En este ejemplo, para $a = -\frac{1}{3}$ no se forma ningún triángulo.

Actividad 4

1. *Realicen una construcción dinámica en GeoGebra de un rectángulo de perímetro 10, de modo que al mover uno de los vértices se modifiquen las medidas de los lados, pero se conserve el perímetro.*
2. *Analicen si es posible encontrar un rectángulo perímetro 10 y*
   a. *área 10.*
   b. *área 5.*
3. *¿Cuál de los rectángulos de perímetro 10 tiene mayor área?*

La construcción pedida en la parte a) no resulta sencilla, por lo que se prevén intervenciones docentes colectivas para reflexionar sobre cómo es posible hacerla o incluso construirla entre todos, registrando las decisiones que se van tomando.

Como hemos señalado para otros problemas, esta construcción necesita de un espacio de exploración con lápiz y papel antes de poder llevarla a GeoGebra, ya que resulta complejo analizar la relación entre las variables que intervienen operando solo desde el programa.

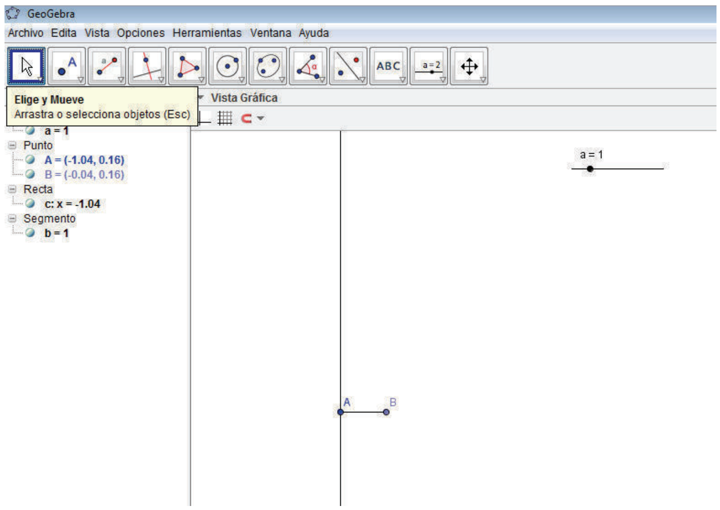
En este caso, se trata de que los alumnos reconozcan que si el perímetro es 10, entonces $2x+2y=10$, donde x e y representan las medidas de los lados del rectángulo. La relación puede reescribirse como $x+y=5$ ó $y=5-x$, de donde resulta que, como x e y no pueden ser negativos, entonces ambos valores solo pueden variar entre 0 y 5.

Se tienen entonces los lados del rectángulo, que son x y 5 – x, donde x toma valores entre 0 y 5. Esta primera relación permite pensar en representar a la medida x como un deslizador.

Una posible construcción sería:

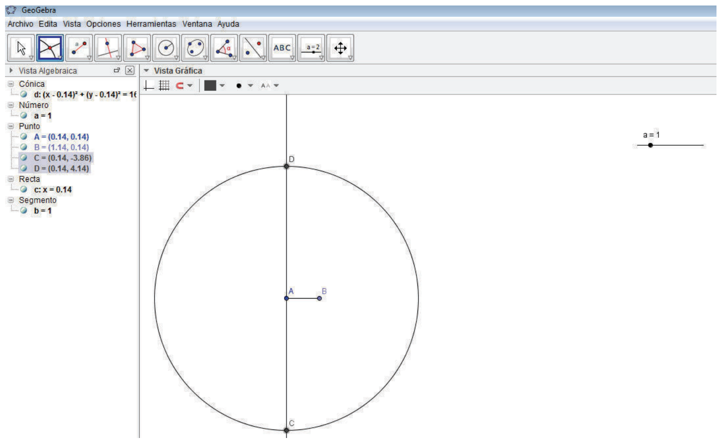
- Se construye un Deslizador con un valor Máximo de 5 y un valor Mínimo de 0, con un incremento de 0.1 por defecto.
- Luego construimos un Segmento de longitud dada (a partir de un punto extremo y su longitud –en este caso, el valor del deslizador). Este es un lado del rectángulo buscado.

- Con la herramienta Recta perpendicular, se traza una recta que pasa por A y es perpendicular al segmento AB.

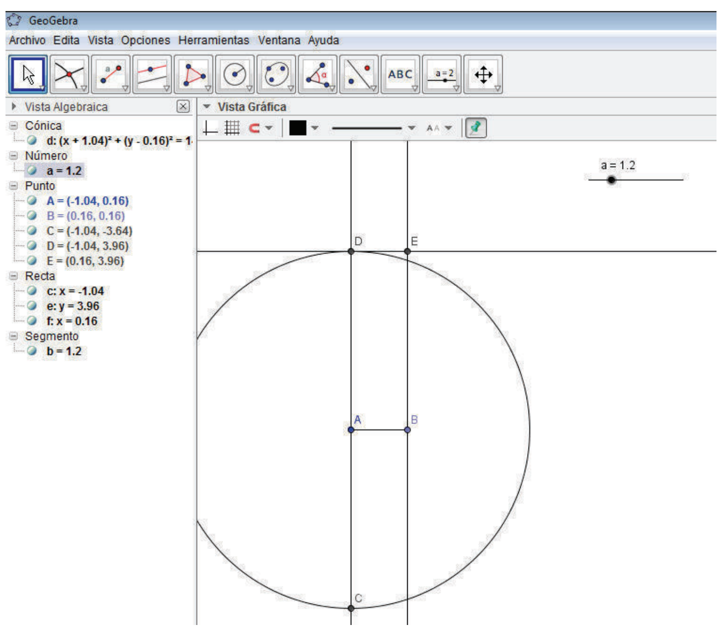


Nos parece importante tener en cuenta que no todos los conocimientos informáticos son construibles, que es necesario mostrar algunos. En este sentido, es interesante pensar qué cuestiones tienen que ser contadas por el docente y en cuáles vale la pena que los alumnos exploren.

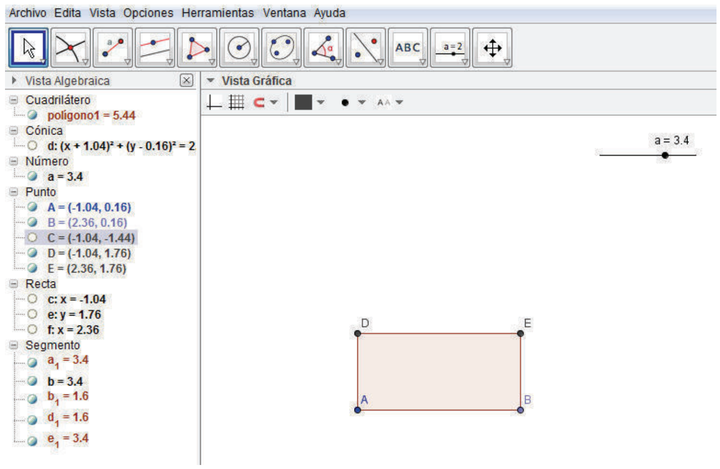
- Con la herramienta Circunferencia dado su centro y radio, se construye una circunferencia de centro A y radio igual a $5-a$. Con la intersección de la circunferencia y la recta perpendicular queda determinado el otro lado del rectángulo.



- Con el Trazado de rectas paralelas, se construye el rectángulo buscado.



- Con la herramienta Polígono, finalizamos la construcción.



El perímetro puede encontrarse utilizando la barra de entrada, para lo cual podrá ingresarse la fórmula p=2(a_1+b_1), teniendo cuidado con cómo se ingresan los subíndices. Así se hace visible en la vista algebraica el valor del perímetro (p).

La idea de una construcción dinámica no resulta simple de atrapar, y muchas veces choca con la concepción de Geometría que los alumnos tienen. Sin embargo, en este caso, la construcción estática puede ser un insumo para pensar en la dinámica. Es decir, las relaciones puestas en juego al construir un rectángulo de perímetro 10 son las mismas que se necesitan para pensar en todos.

Es posible que algunos estudiantes intenten realizar construcciones donde no se conserve el perímetro, como por ejemplo:

- trazar un segmento AB,
- dibujar una perpendicular al segmento que pase por uno de sus extremos,
- graficar dos paralelas, una al segmento y otra a la perpendicular trazada,
- construir el rectángulo con la herramienta Polígono.

Si bien en este caso la figura del rectángulo se conserva a pesar de los desplazamientos–, resulta muy difícil encontrar uno con el perímetro 10. E incluso en el caso en que pueda encontrarse, no se podrán hallar todos.

El contexto del problema aporta el rango sobre el que pueden variar los dos lados del rectángulo, determinando con ello los valores de variación del deslizador. Permite encontrar un procedimiento para hallar diferentes soluciones del problema. Es interesante volver sobre el paso del deslizador, que hace que un problema con infinitas soluciones tenga una cantidad finita representables por el programa.

La pregunta b) pone en escena la variación del área de los rectángulos de perímetro 10. El contexto que presenta este problema plantea una situación que suele resultar sorprendente para los alumnos. Las dos cuestiones que surgen son:

- que hay rectángulos (infinitos, de hecho) con perímetro 10;
- que las áreas de esos rectángulos varían, a diferencia de su perímetro.

Esta pregunta lleva a explorar con el rectángulo dinámico construido en la parte a), analizando cómo varían las áreas. Esto permite conjeturar que, a medida que aumenta la base de los rectángulos, las áreas crecen y luego decrecen. No resulta costoso decidir que no llegan a tomar el valor 10.

El rectángulo de área 5 no necesariamente podrá visualizarse debido al paso del deslizador. Sin embargo, podrá discutirse que ese rectángulo existe dada la variación continua del área y considerando que existen rectángulos con áreas mayor y menor que 5. También podrá cambiarse el valor del paso a 0,01 para analizar la variación.

La pregunta c) solicita encontrar el rectángulo de mayor área. Ya no se trata de determinar si existe uno que tenga el área mayor, sino de encontrarlo. Las restricciones del programa hacen que no sea posible determinar cuál es ese rectángulo, ya que hay varias posiciones del deslizador para el cual se visualiza un área de 6,25, que es la mayor –al menos, para GeoGebra. En este momento se podrá sugerir a los alumnos que vuelvan a modificar el paso del deslizador, haciéndolo menor, para afinar la exploración. Sin embargo, esta estrategia no permite saber cuál es el rectángulo de mayor área, aunque muchos alumnos conjeturan que tiene que ser el cuadrado.

En un debate colectivo, podrán ponerse en común aquellas cuestiones que los alumnos lograron conjeturar a partir de la exploración. Por ejemplo:

- *Las áreas de los rectángulos aumentan, llegan a un valor máximo y disminuyen.*
- *No hay rectángulos que tengan área 10.*
- *El área máxima parece ser de 6,25.*
- *El rectángulo de área máxima parece ser el cuadrado de perímetro 10.*

La validación requiere de profundizar este trabajo de exploración, en una tarea comandada por el docente.

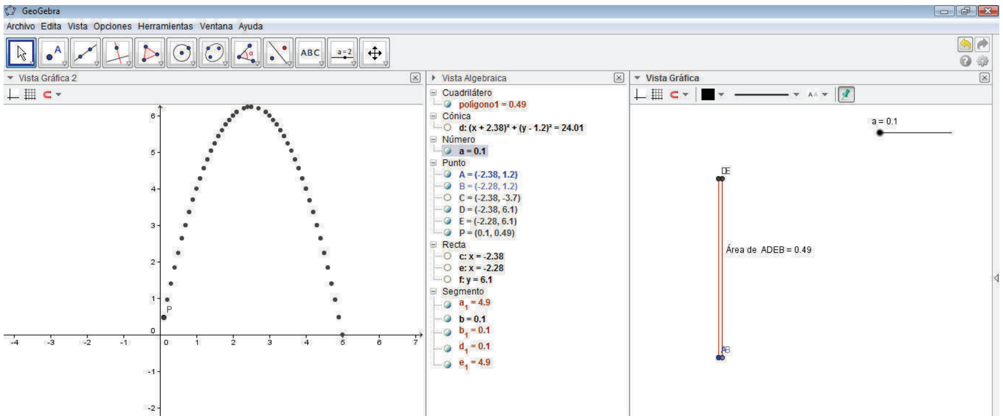
Una manera de hacerlo es que para mostrar cómo varían las áreas en función de la medida de la base del rectángulo, el profesor proponga graficar esta relación. Para ello, tendrá que enseñar cómo definir un punto Q de coordenadas $\left(a, \acute{A}rea\right)$:

- *Definan un punto Q, ingresando en la Barra de Entrada:*

$$Q=\left(a, Area\left[polígono1\right]\right)$$

- *Apliquen el comando Activa Rastro al punto Q, haciendo clic derecho sobre el punto.*
- *Dinamicen la construcción para observar el recorrido del punto Q, haciendo variar el valor del deslizador.*

Al hacer variar el valor del deslizador, se obtiene una gráfica como la siguiente.



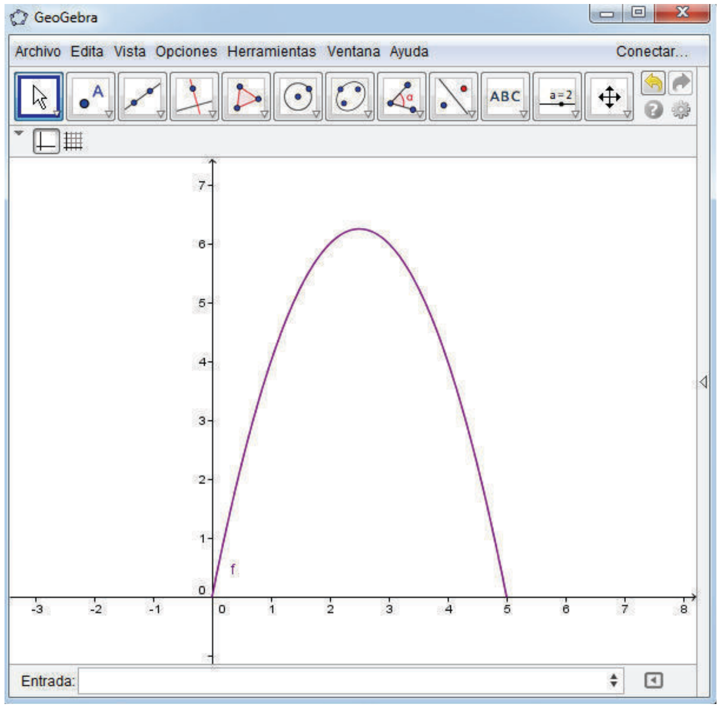
Variación del área del rectángulo en función de la medida de su base

Resulta interesante, en este momento, analizar junto a los alumnos la gráfica, por ejemplo a partir de preguntas como:

- *¿Qué representan los puntos obtenidos?*
- *¿Por qué la gráfica no es continua?*
- A partir de este trabajo es posible definir la función que permite hallar el área máxima. Definiendo a x como la medida de la base del rectángulo, su altura vale $5-x$ y su área $A(x)=x(5-x)$.

- *¿Cuáles son el dominio e imagen de la función $A(x)$? ¿Cómo usarla para hallar el área máxima del rectángulo?*

El dominio de la función está restringido por el problema y será el intervalo (0,5). Para encontrar el conjunto imagen puede usarse el comando Máximo[f,0,5], que dará el valor máximo de esta función: Im(f) = (0 ; 6,25].



El uso del programa permite visualizar la relación entre los marcos geométrico, algebraico y funcional. También brinda la posibilidad de encontrar el valor máximo de una función, analizar su comportamiento.

El problema planteado puede además trabajarse desde el marco algebraico, apoyándose en todo lo que el programa permitió explorar. Por ejemplo, que las áreas se anulan para $x = 0$ y $x = 5$, ya que no hay rectángulo en esos casos, que las áreas crecen entre 0 y 2,5 y decrecen para valores de x mayores que 2,5, que el valor máximo se alcanza cuando $x = 2,5$, es decir, cuando el rectángulo es un cuadrado.

A modo de cierre de la segunda secuencia

Los problemas que presentamos en esta secuencia de trabajo ponen de relieve el uso de GeoGebra no solo como una herramienta de visualización de una representación, sino para darle un sentido a esa representación. Es decir, no se hace un gráfico a pedido del enunciado del problema, sino que esa representación es una manera de resolverlo. Esto requiere tomar la decisión de hacer un gráfico e interpretar qué información aporta para la situación que se está resolviendo.

En todos los casos planteados, es necesario un trabajo de ida y vuelta entre GeoGebra y el lápiz y papel. Por ejemplo, en el problema 1 era necesario un trabajo a mano para encontrar una relación entre los parámetros de las rectas que permitiera su representación gráfica y así analizar qué tiene en común cada familia.

En el caso de la actividad 2, el trabajo a partir de un escenario armado pone en foco un análisis más apoyado en lo conceptual. Además, las restricciones del paso racional del deslizador juegan aquí un rol importante. La exploración y la intuición dicen que el ángulo entre las rectas varía de forma continua, por lo que, si toma valores mayores y menores que 90°, entonces en algún momento tiene que valer 90°. La validación de la relación entre las pendientes parte de una conjetura que los alumnos podrán explicitar solos o con ayuda del docente, pero por fuera del programa.

La actividad 3 nuevamente se centra en un uso exploratorio de GeoGebra que implica luego apelar a un trabajo algebraico para encontrar los valores de *a* para los cuales las rectas forman un triángulo rectángulo. Pero la visualización de las posiciones relativas entre las rectas permite, además, tomar decisiones con respecto a las soluciones que se encuentran a partir de la resolución analítica, ayuda a explicar por qué algunas no son solución a pesar de ser solución de la una ecuación correcta para este problema.

La actividad 4 pone a las funciones al servicio de una modelización. La función que muestra el rastro de un punto adquiere aquí un sentido más que importante. Se trata de un trabajo que es muy costoso de resolver con lápiz y papel, pero que ciertamente necesita validarse de esa manera.

En cada uno de estos problemas se abordan cuestiones vinculadas con las rupturas que introduce el uso de la computadora en la clase de Matemática. Resulta interesante analizarlas y decidir sobre cuáles se quiere hacer hincapié en las discusiones colectivas, teniendo en cuenta que no responden a contenidos matemáticos, sino que aportan a crear un contrato de trabajo matemático con computadora.

Apartado final

Nuestro objetivo en este escrito fue presentar algunas situaciones de enseñanza apoyadas en el uso de tecnología que pueden favorecer el aprendizaje de la Matemática. Se trata de algunos ejemplos que creemos pueden servir como punto de partida para comenzar a pensar cómo integrar la tecnología para lograr una mayor comprensión de los objetos matemáticos en juego.

Somos conscientes de que repensar la enseñanza desde esta perspectiva no es simple, que requiere revisar las prácticas a la luz de una herramienta que, tal vez, no resulte demasiado conocida, pero cuya potencialidad se irá configurando a partir de los problemas que se planteen.

Las investigaciones muestran que el uso regular de GeoGebra u otros programas similares permiten a los alumnos desarrollar conocimientos matemáticos e informáticos –vinculados al uso del programa–, y articularlos. Tener esto en cuenta en la planificación de las actividades que se van a desarrollar ayudará a la construcción conjunta de los dos tipos de conocimientos.

Hemos hecho hincapié en un trabajo a largo plazo. Pensamos que los conocimientos que se proponen requieren de tiempo para ser construidos, con diversas vueltas sobre los mismos. Trabajos aislados no lograrán la profundidad conceptual que se pretende.

La posibilidad de cambiar de registro hace que las concepciones que los alumnos construyen sean más flexibles y, por lo tanto, más adaptadas para resolver problemas.

Los invitamos entonces a abrir el juego que implica revisitar la enseñanza.

Bibliografía

ARTIGUE, Michèle (2000). *Instrumentation Issues and the Integration of Computer Technologies into Secondary Mathematics Teaching*.Paris. Disponible en:

http://webdoc.gwdg.de/ebook/e/gdm/2000/artigue_2000.pdf (enero de 2014)

ARTIGUE, Michèle (2007). *L'influence des logiciels sur l'enseignement des mathématiques: contenus et pratiques.* Université Paris 7 Denis Diderot. Actes du séminaire national. Utilisation des outils logiciels dans l'enseignement des mathématiques. Paris, le 5 et 6 février 2007. Disponible en:

http://irem.univ-rouen.fr/sites/default/files/u17/seminaire_desco_Artigue.pdf (enero 2014).

ASSUDE T. Y GELIS J.-M. (2001). *La dialéctique ancien-nouveau dans l'intégration de Cabri-géomètre à l'école primaire,* Educational Studies in Mathematics, 50, pp. 259-287.

BALACHEFF, N. (2000). *Entornos informáticos para la enseñanza de las matemáticas: complejidad didáctica y expectativas*. En N. Gorgorió, J. Deulofeu y A. Bishop (coords.): *Matemáticas y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional*. Barcelona: Graó; 93-108.

BROUSSEAU, Guy (1986). *Fundamentos y Métodos de la Didáctica de las Matemáticas.* Córdoba, Argentina. Facultad de Matemática, Astronomía y Física. Universidad Nacional de Córdoba.

ÇALIŞKAN-DEDEOĞLU, Nuray (2006). *Usages de la géométrie dynamique par des enseignants de collège. Des potentialités à la mise en oeuvre: quelles motivations, quelles pratiques?* UNIVERSITÉ PARIS 7 – DENIS DIDEROT. UFR de MATHÉMATIQUES. París. Francia.

CHARLOT, Bernard (2007). *La relación con el saber. Elementos para una teoría.* Buenos Aires. Libros del Zorzal.

CHEVALLARD, Y. (2013). *La matemática en la escuela: Por una revolución epistemológica y didáctica*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

DOUADY, Régine (1999). *Juegos de Marcos y Dialéctica Herramienta- Objeto*. Recherche en Didactique de la Mathématiques. Grenoble, Le Pensé Sauvage; Vol. 7, Nº 2, Pág. 5- 31.

FREIMAN, VIKTOR, MARTINOVIC, DRAGANA, KARADAG, ZEKERIYA (2009). *Découvrir le potentiel educatif du logiciel dynamique GeoGebra: communauté de collaboration et de partage.* Bulletin AMQ, Vol. XLIX, no 4, decembre 2009 – 34.

ITZCOVICH, Horacio y NOVEMBRE, Andrea (2006). *Matemática: Diferentes Aspectos del Trabajo Algebraico.* CePA. Ministerio de Educación de la Ciudad de Buenos Aires.

MARIOTTI, Maria Alessandra (2002). *Influence of technologies advances on students' math learning*. En English L., Bartolini Bussi M. G., Jones G., Lesh R., & Tirosh D. (eds.). Handbook of International Research in Mathematics Education, Lawrence Erbaum Associates.

NOVEMBRE, Andrea (2012). *Aprendizajes matemáticos y didácticos de los docentes en instancias de capacitación.* En: Broitman, Claudia (Comp.). *Matemáticas en la escuela primaria (II). Saberes y conocimientos de niños y docentes.* Buenos Aires, Paidós.

RESTREPO, Angela (2008). *Genese Instrumentale du Deplacement en Geometrie Dynamique chez des Eleves de 6eme.* Université Joseph Fourier. Francia.

SADOVSKY, Patricia, SESSA, Carmen NAPP, Carolina, NOVEMBRE, Andrea. *La formación de los alumnos como estudiantes. Estudiar Matemática*, serie: Apoyo a los alumnos de primer año en los inicios del nivel medio. Documento curricular de la Secretaría de Educación del GCBA. Disponible en http://www.buenosaires.esc.edu.ar/areas/educacion/curricula/d2web01.pdf (Abril de 2013)

SADOVSKY, Patricia (2005). *Enseñar Matemática Hoy*. *Miradas, Sentidos y Desafíos.* Buenos Aires, Libros del Zorzal.

SCAGLIA, SARA Y GÖTTE, MARCELA (2008), *Una propuesta de capacitación docente basada en el uso de un software de geometría dinámica.* Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias Volumen 3 Nro.1, pág. 35-50. Disponible en https://7bd81d52-a-62cb3a1a-s-sites.googlegroups.com/site/reiecniecyt/ano-3-nro-1/REIEC_anio3_num1_art4.pdf?attachauth=ANoY7coEeW8JJXxzaxiqg4J8eatRew-aVHrIqF-qouBkqYJmGVggiFGJSM3zgyfXGLqjauoc6L_qSmqbgh9XM7V2LtdljdRPpuDQ1q94np59yuPQqnouM-IuHBTcYQTfeX8UFFPn7GkuE06nzGeD2eO56aIQp2XQx-asU7LZ1qPd2WZcYRDvqf_KUO3KUktHUEvY3TFdjEO7m_EEW4-fimauKQ0pUXWDbdQuStisx4PZAonkPoMxn3s1imqq6kfkRT8KxOSQQfSM&attredirects=0 (Abril de 2013)

TRẦN KIÊM MINH (2011). *Apprentissage des Fonctions au Lycée avec un Environnement Logiciel. Situations D'Apprentissage et Genèse Instrumentale des Élèves.* Tesis dirigida por Jean-Baptiste Lagrange. Defendida públicamente el 13 de Septiembre de 2011. Disponible en http://hal-univ-artois.archives-ouvertes.fr/docs/00/65/86/80/PDF/These_Tran_Kiem_Minh.pdf (consultado en mayo de 2014)

TROUCHE, Luc (2004*). Environnements Informatisés et Mathématiques: Quels Usages pour quells Apprentissages?* Educational Studies in Mathematics 55: 181–197, 2004. © 2004 Kluwer Academic Publishers. Holanda.

WOLMAN, Susana y QUARANTA, María Emilia. (2006). *Una Perspectiva Didáctica. En Enseñar Matemática en la Escuela Primaria.* Serie Respuestas. Editorial Tinta Fresca. Buenos Aires.