UNIÓN
REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Marzo de 2012, Número 29, páginas 9-22
ISSN: 1815-0640
firma invitada

El dinamismo de GeoGebra

Agustín Carrillo de Albornoz Torres

Introducción

Ya hace algunos años, concretamente en 1985, desde que comencé mis relaciones con las TIC, aunque en esa época el nombre que recibían era el de “nuevas tecnologías” por la novedad que para los ámbitos educativos suponía la entrada de los computadores en las aulas. Desde entonces mi objetivo ha sido promover el uso de las TIC o de las NNTT (nuevas tecnologías) como recursos para la enseñanza y el aprendizaje en el área de matemáticas, lo que ha supuesto mi implicación en gran cantidad de actividades de formación dirigidas a los distintos niveles educativos para intentar que el profesorado conozca y sobre todo aproveche las posibilidades que estos recursos considero que ofrecen.

Esta tarea no es sencilla ya que cualquier cambio en el profesorado no es inmediato y mucho menos cuando supone un cambio metodológico.

A pesar de los esfuerzos que muchos docentes han realizado y, también a pesar de las políticas educativas que en los últimos años y en bastantes países han invertido y apostado para facilitar computadores a los centros educativos, sigo pensando que no se ha conseguido la integración real de las TIC en los procesos educativos.

Integración no es lo mismo que utilización. Es evidente, que hay que reconocer y valorar los esfuerzos del profesorado por utilizar las TIC en su trabajo en el aula, pero algo ha fallado para no alcanzar la integración esperada por la inversión realizada en cuanto a apoyo económico, en material y también en formación, por lo que toca seguir trabajando en esta línea, para que en algún momento sea posible lograr la integración.

Durante estos años, en las acciones de formación en las que he participado, he difundido el uso de ciertos recursos o programas de utilidad para el área de matemáticas como han sido los programas de geometría dinámica, de cálculo simbólico o las calculadoras, sin olvidar todo lo Internet pone a nuestra disposición.

De todas las opciones que las TIC ofrecen para su uso en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, quisiera dedicar las siguientes líneas de este artículo, a exponer algunas ideas sobre GeoGebra que puedan ser de utilidad para el profesorado que tenga como objetivo incorporar las TIC a su tarea diaria.

El dinamismo de GeoGebra

Recordando recursos utilizados en estos años, no podemos olvidar programas como Cabri Géomètre, Geometer's Sketchpad, Cinderella, Regla o compás y otros similares nacidos al amparo del desarrollo del software libre, que en distintos momentos han sido de gran ayuda para el profesorado, sobre todo cuando se trataba de aprovechar su posibilidades para desarrollar proyectos o contenidos de geometría que se convertía en dinámica con la ayuda de las herramientas que estos recursos ofrecían.

Las construcciones adquirían movimiento, permitían transformaciones sin más que arrastrar cualquier objeto con el ratón, lo que ofrecía la posibilidad de interactuar y por tanto investigar sobre una determinada construcción; lo que suponía ganar en dinamismo frente a la rigidez de los medios utilizados hasta ese momento.

Cada uno de los programas anteriores tiene su mérito, han ayudado y sobre todo han facilitado la incorporación de nuevos programas, como ha ocurrido con GeoGebra, ya que ha bastado realizar pequeños cambios para transformar lo que se hacía con ellos para adaptarlos al nuevo software.

GeoGebra mantiene la sencillez y el dinamismo, añadiendo algunos valores como ser libre y multiplataforma y sobre todo, permite trabajar casi todos los bloques de contenidos, por lo que no es solo geometría.

Además, al tener la consideración de software libre no requiere inversión para su uso y algo importante, su continua evolución que hace que nazcan nuevas versiones o que incorporen nuevas herramientas con las que aumenta su potencia y sus posibilidades didácticas.

Estoy convencido que las razones anteriores y alguna más, son las causantes de la generalización de GeoGebra que lo están convirtiendo en un recurso imprescindible para todo el profesorado interesado en trabajar con las TIC en su aula.

GeoGebra no es solo geometría (Geo), al menos como su nombre indica también es álgebra (Gebra), aunque la realidad es más, es cálculo, es análisis y también estadística; en definitiva GeoGebra supone una excelente opción para hacer unas matemáticas dinámicas sobre todo en los niveles educativos de Primaria, Secundaria y también Bachillerato.

Es evidente que GeoGebra no tiene la exclusividad como programa para la enseñanza, pero la gran variedad de opciones que ofrece hacen que su uso, no sea solo para dibujar o construir, sino también, como veremos a través de algunos ejemplos, permitirá proponer al alumnado sencillas tareas de investigación y experimentación, que en la mayoría de los casos no requerirán demasiados conocimientos técnicos ya que bastará con conocer algunas herramientas básicas y algunos comandos para afrontarlas.

Algunas propuestas para desarrollar con GeoGebra

Con GeoGebra se pueden realizar construcciones de muy diversa variedad y sobre todo complejidad, aunque lo ideal o recomendable es comenzar con propuestas sencillas, sobre todo cuando se trata de incorporarlo al aula, dejando para más adelante las propuestas que requieran un mayor esfuerzo en la construcción. Esto facilitará que apenas se pierda tiempo en los procesos técnicos y por tanto, se pueda dedicar todo el tiempo y el esfuerzo a la parte didáctica que es la que requiere el aprendizaje del alumnado.

Además, siempre nos queda aprovechar las excelentes construcciones disponibles en Internet, en las que solo hay que acceder para utilizarlas, aunque en ocasiones, quizás interese adaptarlas a las características de nuestro alumnado o de los contenidos que se deseen trabajar.

Al utilizar GeoGebra se podrá platear en cada momento, la realización de cualquier construcción geométrica que ayude al alumnado a familiarizarse con el significado de dinamismo y sobre todo a comprender la diferencia entre dibujar y construir.

Realizar una construcción a diferencia de dibujar supone establecer unas relaciones entre los objetos que intervienen, de manera que al mover cualquier objeto inicial se mantendrán las relaciones (matemáticas) entre los objetos de la construcción.

Una propuesta sencilla que puede ayudar a comprender estos conceptos puede ser: "dada una circunferencia de centro O, traza la circunferencia cuyo centro esté en un punto cualquiera P y sea tangente a la circunferencia anterior".

Una vez dibujados los objetos iniciales: la circunferencia de centro O y un punto P, en este caso exterior; se dibujará una circunferencia que cumpla las condiciones pedidas. Para ello, bastaría con seleccionar la herramienta *Circunferencia dados su centro y uno de sus puntos*, marcando P como centro y buscando un punto de tangencia en la circunferencia A, tal y como aparece en la imagen siguiente:

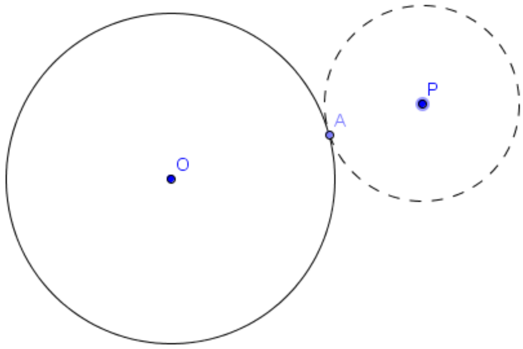


Figura 1

Es evidente que la construcción no es correcta ya que la circunferencia perderá la condición de tangencia al mover el punto P.

Al no establecer relaciones entre los objetos, lo que hemos hecho ha sido dibujar y no construir.

Sin embargo, si previamente trazamos el segmento o la recta que une los puntos O y P, para obtener a continuación, el punto A de intersección con la circunferencia y, posteriormente, dibujamos la circunferencia de centro P y radio PA, podemos observar que se mantendrá la relación de tangencia al mover el punto P: Por tanto, la construcción es correcta.

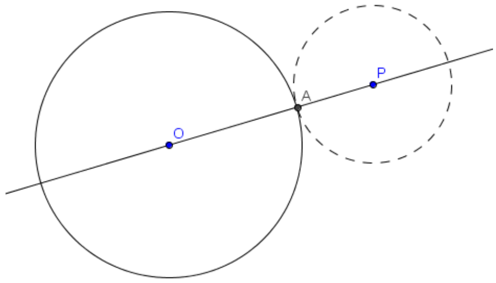


Figura 2

Es conveniente insistir en que los objetos en las dos construcciones anteriores son prácticamente los mismos y sin embargo hay una diferencia importante entre una solución y la otra. Además, podemos plantear si existe alguna razón en el color con el que GeoGebra ha representado el punto A en cada uno de los casos anteriores, lo cual permitirá introducir los conceptos de objetos dependientes e independientes que ayudarán a conocer algo más de GeoGebra.

Además, podemos plantear nuevas cuestiones como si la circunferencia tangente es única o no (evidentemente no, tal y como aparece en la imagen siguiente) o qué ocurre si el punto P es interior a la circunferencia inicial, o si es posible encontrar una circunferencia tangente cuando P pertenece a la circunferencia.

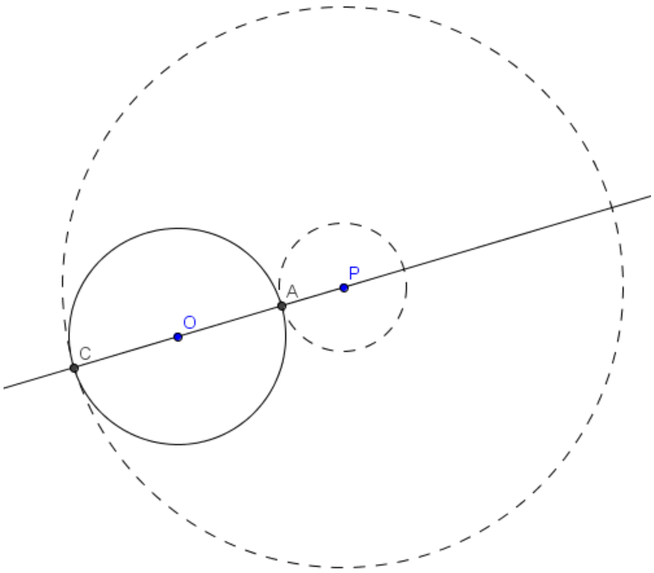


Figura 3

Esta propuesta es sencilla, requiere pocas herramientas y por tanto pocos conocimientos técnicos y sin embargo ofrece “algunas” posibilidades didácticas y algo importante que es promover la investigación y el descubrimiento en el alumnado.

Algo parecido puede ocurrir si le planteamos que determine cuántas circunferencias se pueden dibujar que pasen por un punto dado.

Ampliando a continuación el número de puntos a dos, tres o cuatro, podemos introducir algunos conceptos como mediatriz, circunferencia circunscrita, lugares geométricos o rastro como elemento propio de GeoGebra.

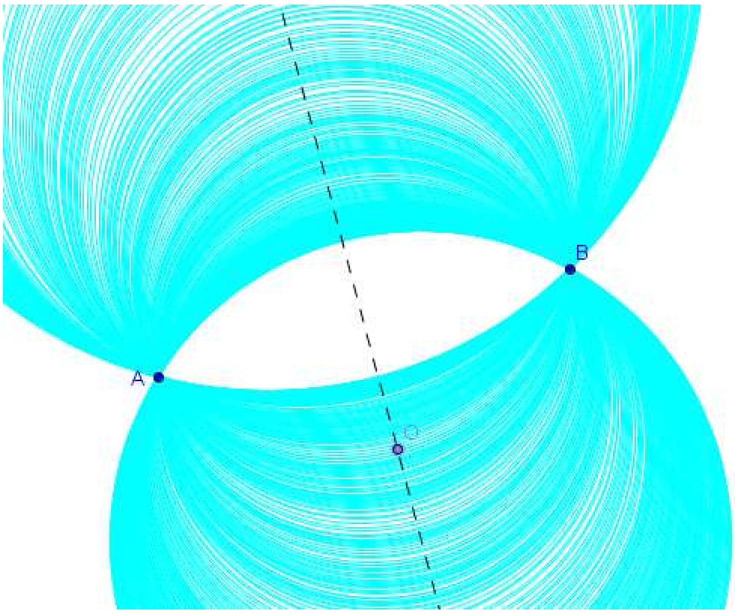


Figura 4

Cualquier ejemplo, por simple que parezca, siempre ofrecerá una gran variedad de posibilidades, a través de las que se podrán introducir nuevos conceptos o nuevas investigaciones, en la mayoría de los casos, sin demasiadas complejidades técnicas.

De manera similar, podemos plantear actividades que requieran además de la construcción, la manipulación de los objetos para determinar condiciones o relaciones entre los objetos que intervienen. Como muestra serviría la siguiente propuesta: “Si ABCD es un cuadrilátero y A´B´C´D´ es el cuadrilátero formado por los puntos medios de cada lado. Clasifica el cuadrilátero A´B´C´D´ según sea el cuadrilátero ABCD”.

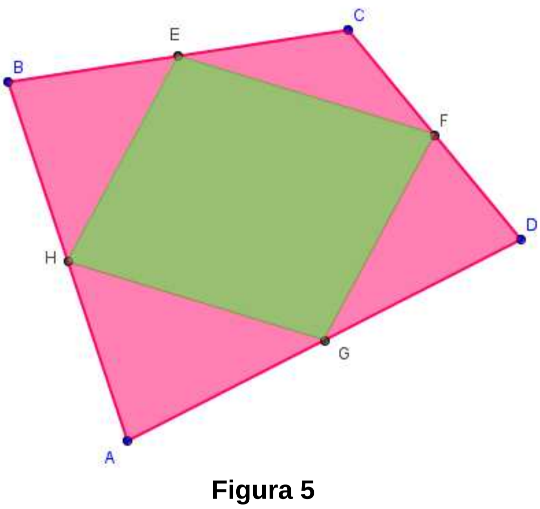


Figura 5

GeoGebra puede resultar de gran ayuda para visualizar ciertos conceptos o relaciones que en ocasiones consideramos triviales y por tanto, no le prestamos la atención necesaria.

Un ejemplo también sencillo, que podemos plantear, aunque requiere algunas herramientas más, sobre todo para logar el movimiento, es determinar de la expresión de ciertas áreas de figuras planas, por ejemplo la del área del triángulo.

El objetivo sería visualizar que el área del triángulo es la mitad del paralelogramo que se construye con la misma base y altura. Para ello, una vez dibujado el triángulo inicial, solo hay que lograr duplicarlo y girarlo para obtener un paralelogramo; acciones que conseguiremos con ayuda de un deslizador y una rotación.

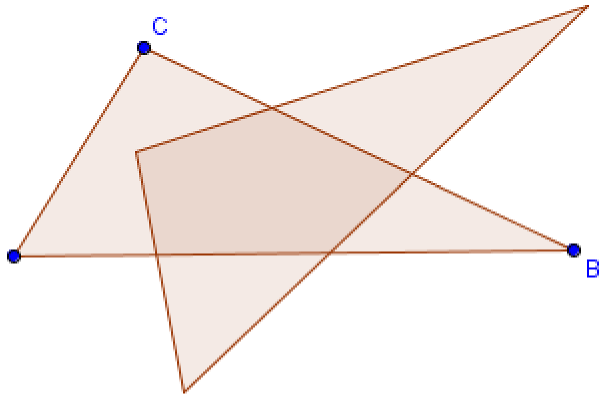


Figura 6

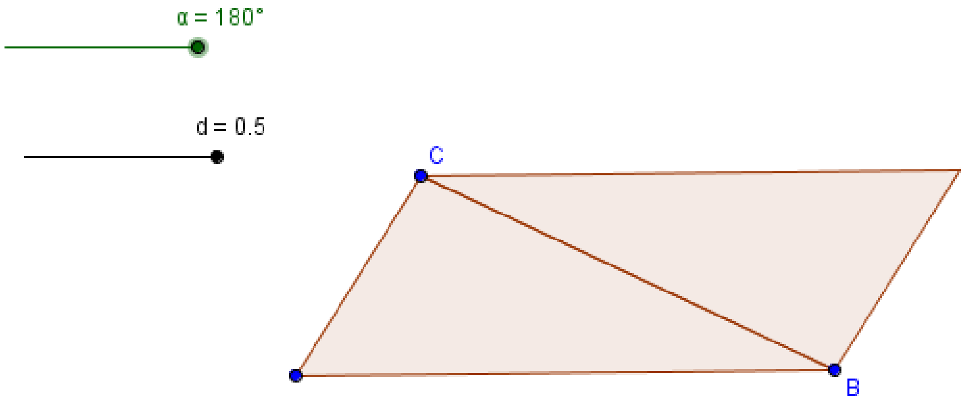


Figura 7

La observación facilitará que el alumnado comprenda y sobre todo no olvide que el área del triángulo es base por altura dividido entre dos que se deduce de ser el área de la mitad del paralelogramos construido sobre el triángulo.

No siempre es necesario realizar las construcciones para introducir o para trabajar conceptos, ya que basta con aprovechar las que encontramos en Internet, como ocurre con la visualización de las relaciones entre algunas áreas de figuras planas, para las que recomiendo acceder a las construcciones realizadas por Manuel Sada.

http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/areas.htm

En esta dirección encontraremos construcciones con carácter interactivo que fomentan la manipulación y por tanto la experimentación, como la mostrada en las imágenes siguientes:

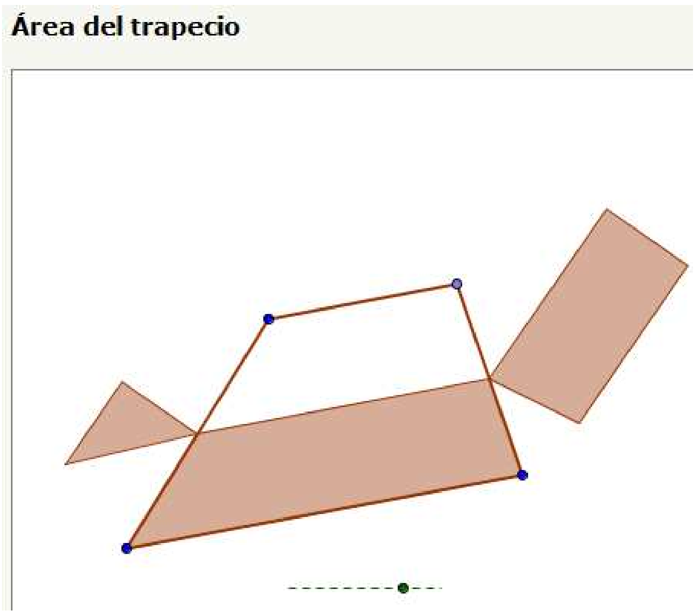


Figura 8

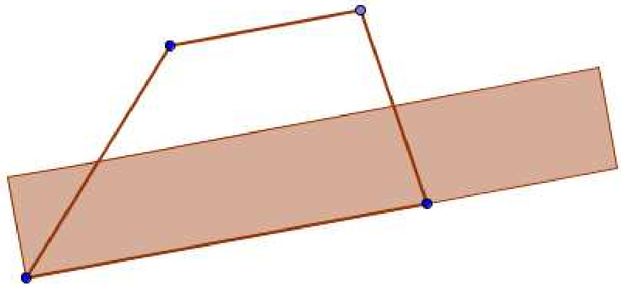


Figura 9

Algo parecido podemos proponer a nuestro alumnado para investigue o para que deduzca determinados teoremas, de los que un sencillo ejemplo sería el siguiente: “Si en un cuadrilátero cualquiera ABCD se construyen cuadrados sobre cada uno de sus lados, las rectas que unen los centros de los cuadrados correspondientes a lados opuestos son perpendiculares”.

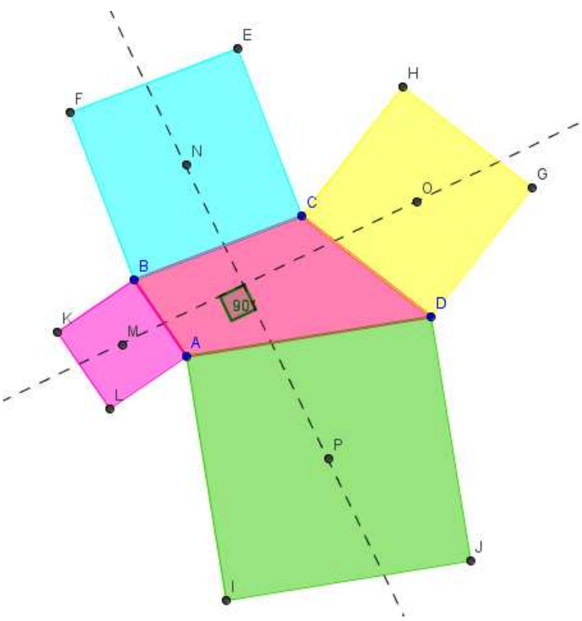


Figura 10

Acciones similares podemos seguir al plantear otros problemas geométricos que facilitarán la utilización de determinados conceptos o teoremas conocidos por el alumnado, como puede ocurrir con las dos siguientes propuestas:

1. Dados dos cuadrados, construir un nuevo cuadrado cuya área sea igual a la suma de las áreas de los dos cuadrados iniciales.
2. Dados dos cuadrados construir un nuevo cuadrado cuya área sea igual a la diferencia de áreas de los dos cuadrados dados.

Aunque GeoGebra ofrece las herramientas necesarias para resolver este problema de forma directa, es conveniente convencer al alumnado para que sea capaz de encontrar una solución geométrica.

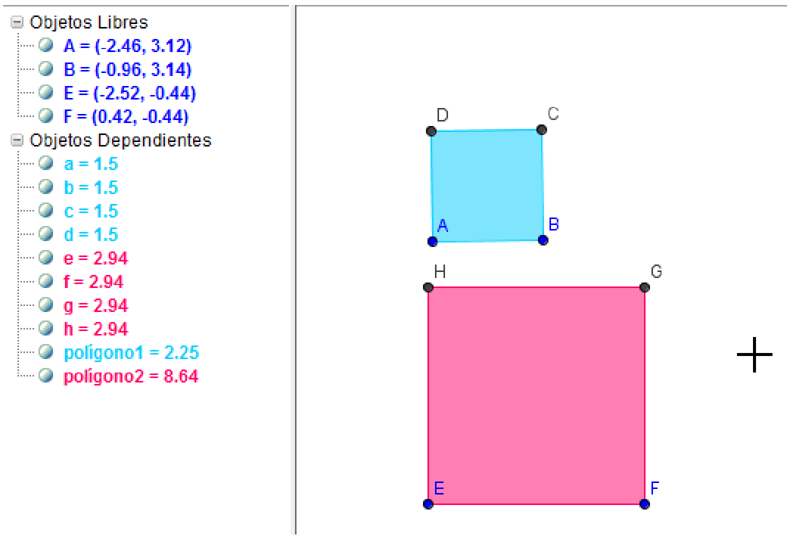


Figura 11

De esta forma podemos relacionar estos problemas con un teorema de sobra conocido por el alumnado como es el teorema de Pitágoras.

El cuadrado buscado será el construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son iguales a los lados de cada uno de los cuadrados iniciales.

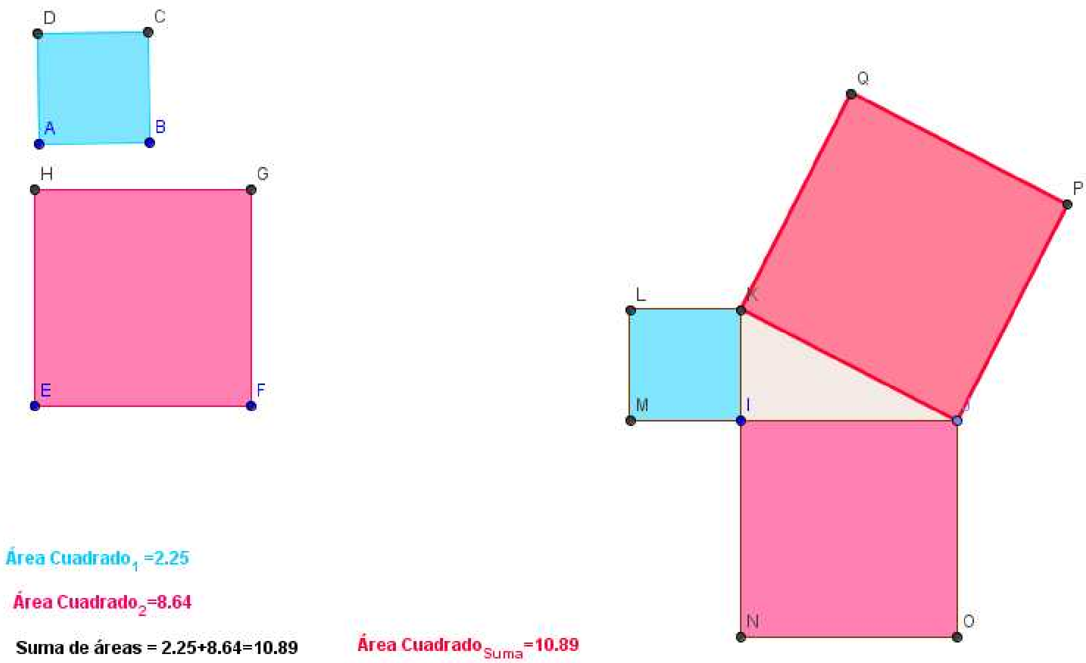


Figura 12

De manera análoga el cuadrado solución (área igual a la diferencia) del apartado 2 será el que construido sobre uno de los catetos de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa sea igual al lado del cuadrado mayor y el otro cateto igual al área del cuadrado menos.

El objetivo de este trabajo no es exponer construcciones espectaculares realizadas con GeoGebra, todo lo contrario, es intentar ofrecer algunas ideas para facilitar el trabajo con GeoGebra, siempre a partir de ejemplos y construcciones lo más sencillas posibles.

Cuando se hace referencia a GeoGebra no se puede olvidar y por tanto citar, las construcciones y sobre todo las propuestas didácticas que ofrece el proyecto Gauss realizadas por Rafael Losada y José Luis Álvarez en el marco del Instituto Nacional de Tecnologías Educativas y Formación del Profesorado del Ministerio de de Educación, Cultura y Deporte del gobierno de España.

Estas actividades creadas para los niveles educativos de Primaria, Secundaria y ahora también para Bachillerato se pueden descargar en la Web:

http://recursostic.educacion.es/gauss/web/

Continuando con las propuestas para utilizar GeoGebra para otros bloques de contenidos, podemos plantear su aplicación por ejemplo para el estudio y representación de funciones o para cálculo simbólico, aunque en este caso, será necesario esperar a que las nuevas versiones sean definitivas.

La continua evolución de GeoGebra hace que cada versión incorpore nuevas opciones y comandos, como ha ocurrido con la versión 4 en la que se ha ampliado el conjunto de funciones disponibles para la representación incluyendo desigualdades o funciones implícitas, además de otras novedades.

Esto nos permite, sin necesidad de utilizar otros programas, que GeoGebra pueda ser de gran utilidad para el estudio y representación de funciones o de conceptos relacionados con el análisis y el cálculo, como puede ser la interpretación de derivada, el concepto de límite o el significado de la integral definida que plantean dificultades al alumnado.

En el estudio y representación de funciones, aunque las opciones por ahora en cuanto a determinar elementos de una función están limitadas a funciones polinómicas, GeoGebra puede facilitar que el alumnado comprenda los efectos que los cambios en los parámetros de una función producen en su representación.

Para ello, basta con definir una función creando previamente un deslizador para cada uno de los coeficientes.

Por ejemplo, para funciones lineales $y = a\,x + b$, definiríamos los deslizadores a y b, introduciendo a continuación la expresión, tal cual de la función; por lo que ya solo quedaría modificar los valores de los deslizadores para observar que cambios producen en la representación y deducir el significado de cada coeficiente.

El mismo proceso se puede realizar para cualquier función, planteando cuestiones que requieran la manipulación de los objetos por parte del alumnado.

Por ejemplo, podemos plantear qué cambios producen en el periodo de la función *y = a sen (b x +c)* los coeficientes *a*, *b* y *c*.

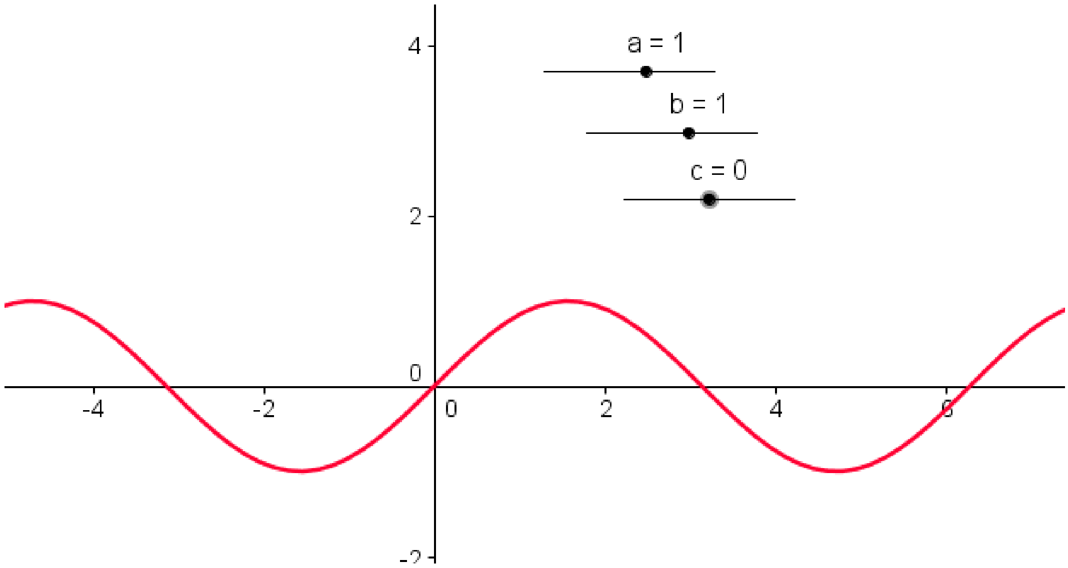


Figura 13

Antes de realizar cambios en los coeficientes conviene dibujar algunos valores para que sea más fácil determinar los periodos. Aprovechamos para introducir el comando *secuencias* si no lo hemos hecho hasta ahora, de manera que fácilmente se dibujarán las rectas $x = k\,\pi$.

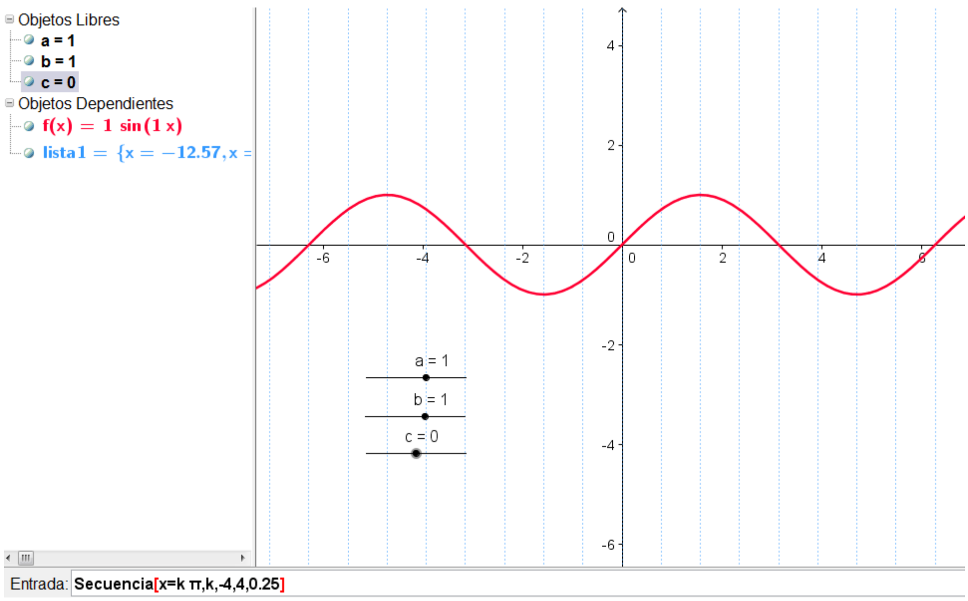


Figura 14

Ya solo queda mover los deslizadores para encontrar los efectos que producen *a*, *b* y *c* sobre el periodo de la función.

GeoGebra también será de ayuda para favorecer la interpretación de conceptos, de los que planteamos el siguiente ejemplo.

Para exponer el concepto de derivada de una función en un punto realizamos una construcción para visualizar que la recta tangente en un punto A a una función *y=f(x)* es el límite de las rectas secantes AB cuando B tiende al punto A. Para ello, solo necesitamos definir un deslizador para acercar y por tanto, hacer tender el punto B al punto A, tal y como aparece en la imagen siguiente:

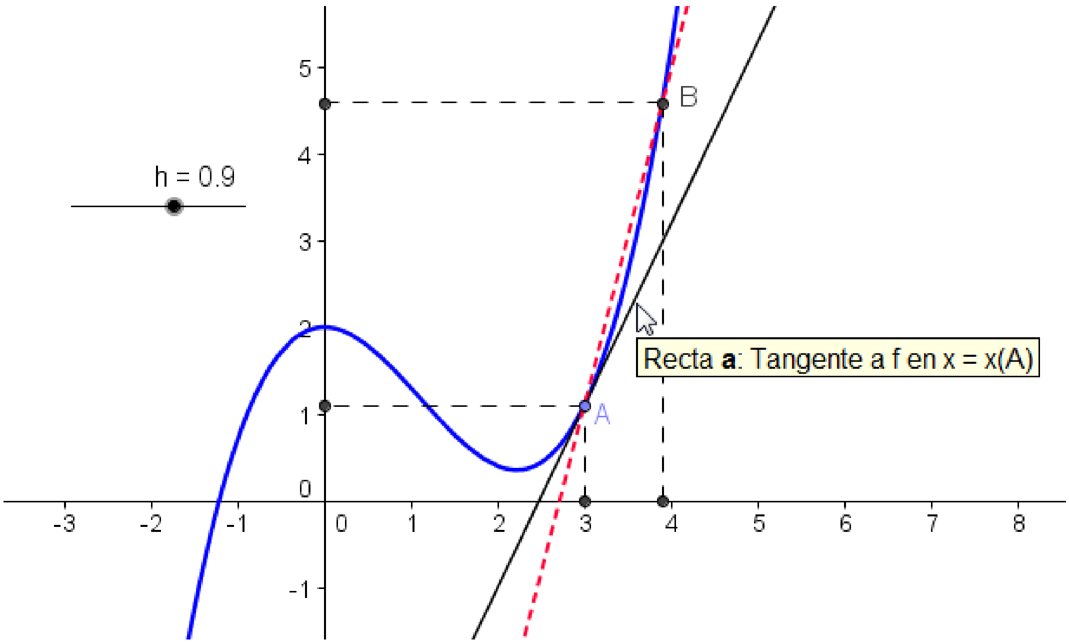


Figura 15

Con pocas modificaciones y con ayuda de las opciones que GeoGebra ofrece para obtener determinadas medidas, podemos calcular el valor de la pendiente de la recta tangente en el punto A.

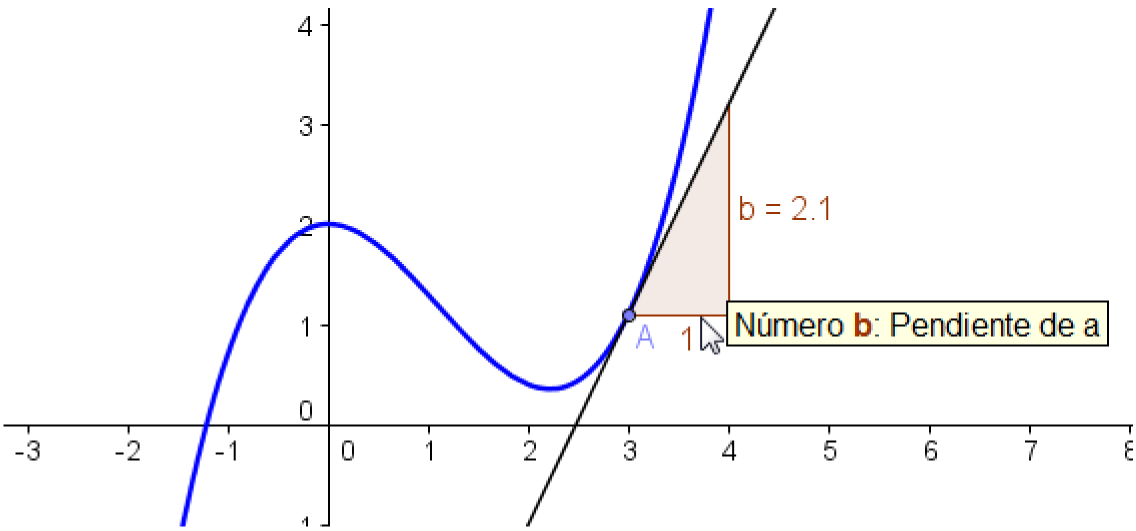


Figura 16

A continuación, para comprobar que el valor de la derivada en el punto A coincide con el valor de la pendiente de la recta tangente, dibujamos la función derivada utilizando el correspondiente comando.

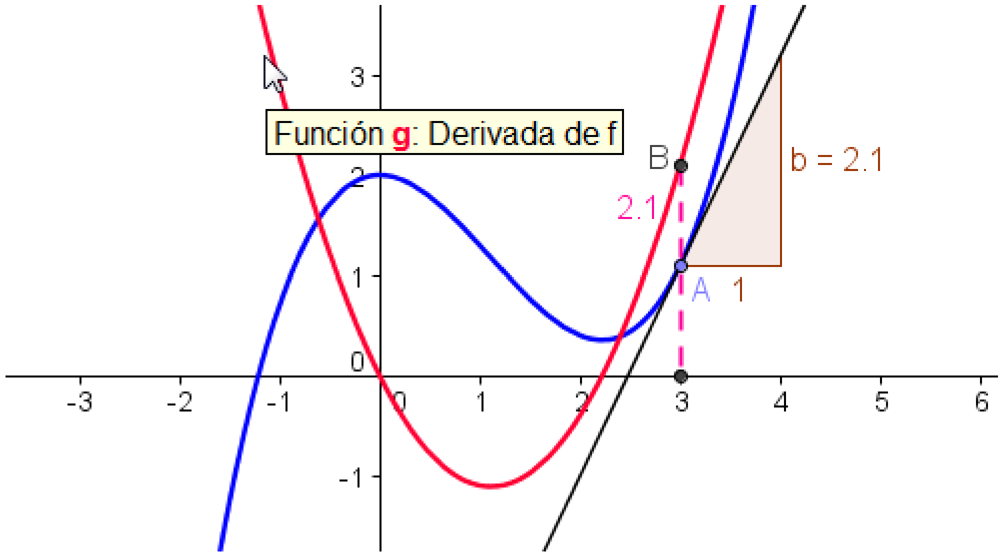


Figura 17

Aún es posible hacer algo más, como es obtener la función derivada utilizando el lugar geométrico o activando el rastro del punto cuya ordenada sea el valor de la pendiente en el punto A cuando recorre toda la función, lo que equivaldría a poder obtener el valor de la derivada en todos puntos de la función.

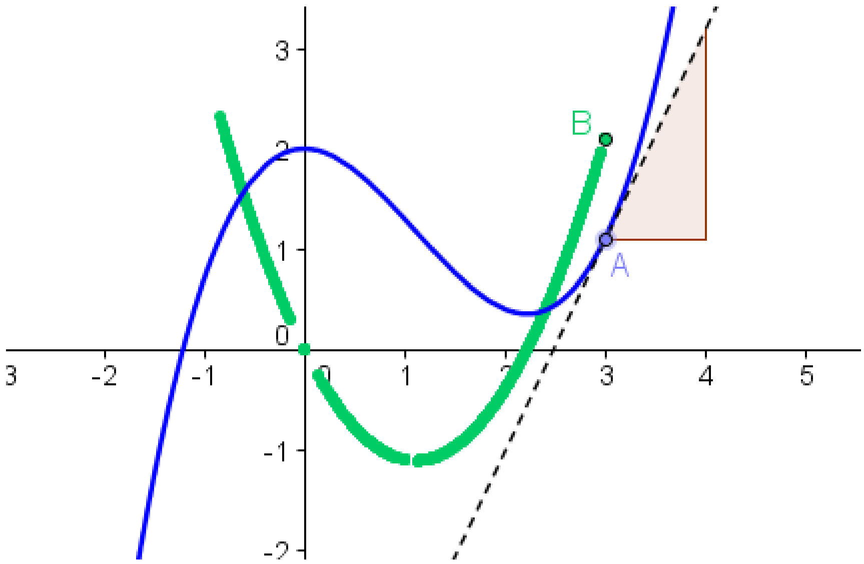
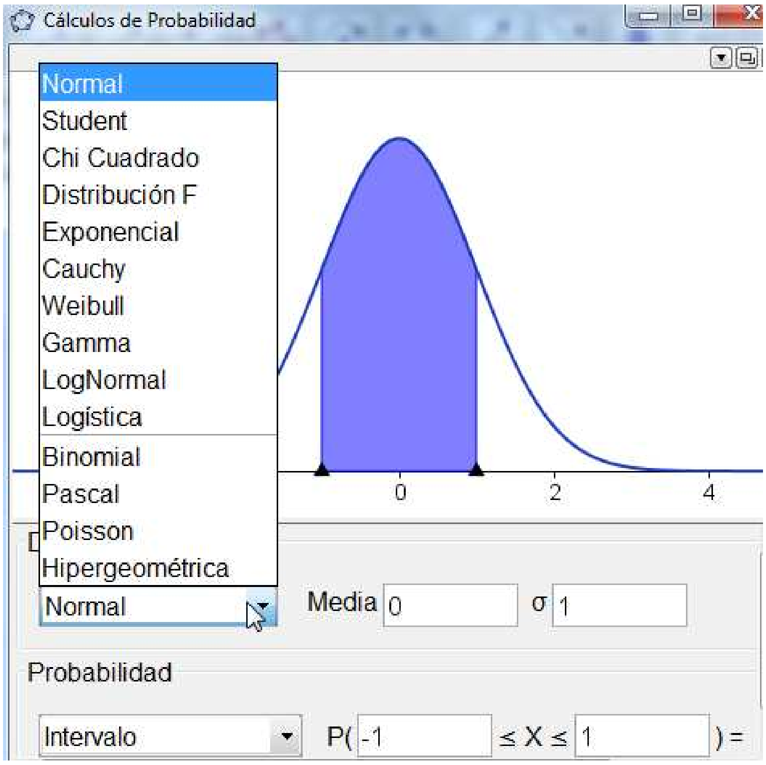


Figura 18

Quizás aún echemos de menos las opciones necesarias para poder utilizar GeoGebra como programa de cálculo simbólico o para realizar estudios estadísticos para los que a pesar de disponer en la última versión de opciones para realizar cálculos de probabilidades, como aparece en la imagen siguiente, o de otras herramientas y comandos que mejorarán y ampliarán en nuevas versiones, cuesta trabajo cuestionar las posibilidades que este software ofrece como recurso para el profesorado interesado en incorporar las TIC a su aula.



Conclusión

Puede que GeoGebra represente la revolución necesaria que facilite la relación entre Matemáticas y TIC que favorezca el cambio en la metodología del trabajo en el aula necesaria para lograr una integración real de las TIC, hecho que hasta ahora considero, como indicaba al principio de este artículo, no se ha conseguido a pesar de la cantidad de programas que en estos años hemos tenido a nuestra disposición aunque seguro que algo habrán ayudado, por lo que en ningún caso se puede entender que utilizar GeoGebra supone despreciar el resto.

Todos han colaborado a que el profesorado de matemáticas pierda el miedo y sobre todo aproveche las TIC, algo que resulta habitual en el mundo de nuestro alumnado.

Para finalizar solo me resta animar, a quien no lo ha hecho hasta ahora, al uso de las TIC; negar su presencia o su utilidad no facilitará la actualización de la escuela a las exigencias del mundo actual y por tanto, solo producirá una escuela desfasada que no es capaz de aprovechar las posibilidades que las TIC ofrecen.